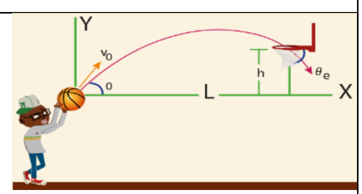
DOCENTE: Janny Lucia Bueno, Sanuber López		**NUCLEO DE FORMACIÓN: Lógico - Matemático**	
GRADO: Décimo	**GRUPOS:** uno, dos, tres y cuatro	**PERIODO:** Dos	**FECHA:**
NÚMERO DE SESIONES:	**FECHA DE INICIO:**	**FECHA DE FINALIZACIÓN:**	
Temas	Situaciones y fenómenos de la vida cotidiana donde el concepto de función cuadrática, su representación gráfica "parábola" y las medidas de posición permiten reconocer, representar, interpretar, modelar y resolver situaciones de contextos reales.		

Propósito de la actividad

Al final del desarrollo de la guía los estudiantes del grado décimo, comprenderán el concepto de función cuadrática y medidas de posición, reconocerán contextos donde estos conceptos tienen aplicación, analizaran, interpretaran, modelaran y utilizaran para resolver situaciones en contextos reales. La realización de esta guía les permitirá a los estudiantes desarrollar competencias como, interpretación y representación, razonamiento, argumentación y resolución de problemas.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1: INDAGACIÓN



Sabías que si no existiera la gravedad, pondrías lanzar un proyectil (cualquier objeto lanzado al espacio por la acción de una fuerza) hacia el cielo, y seguiría una trayectoria recta. Sin embrago, debido a la gravedad la trayectoria describe este proyectil es una curva llamada **parábola**. Éste fue uno de los grandes descubrimientos del científico **Galileo Galilei**, quien descubrió que en el universo eran posibles otras trayectorias diferentes de las rectilíneas y circulares, debido a que todo objeto lanzado por acción de una fuerza (proyectil) por efecto de la gravedad[1] describe una trayectoria parabólica. Imagen tomada de https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_10/S/S_G10_U01_L03/img/act3/parte1/SB_S_G10_U01_L03act3parte1popup1.png

Existen múltiples contextos reales donde el concepto de movimiento parabólico y la función cuadrática, que permite analizar, interpretar, modelar fenómenos y situaciones cotidianas de diversos campos del conocimiento, entre los que tenemos ciencias naturales, la física, química, la economía, el deporte, comunicación, ingeniería, arquitectura, criminología, entre otras.

Alberto es un jugador de futbol, el cual lanza durante su entrenamiento un balón al aire, la altura del balón h en cualquier instante, t, está dada por la fórmula o función $h = 96t - 16t^2$.

Imagen tomada de: https://i.ytimg.com/vi/9_yN5OW8qyA/maxresdefault.jpg

[1] Gravedad: Es la fuerza que ejerce la tierra sobre todos los cuerpos, atrayéndolos hacia su centro.

A partir de la información proporcionada anteriormente, responde las siguientes preguntas.

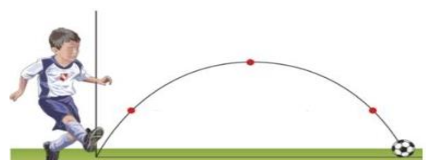
1. Menciona cuatro deportes que se relacionan con el concepto de movimiento parabólico, donde se presenta el movimiento parabólico y porque razón se presenta este movimiento.
.
2. Menciona en un corto párrafo ¿por qué en el campo de la comunicación las torres, los satélites cuentan con antenas parabólicas, que función tienen estas y porqué su forma es parabólica?

3. La función $\boldsymbol{h = 96t - 16t^2}$ que permite determinar la altura **h** del balón según el tiempo de vuelo **t**, ¿Qué nombre recibe este tipo de función según el mayor exponente de la variable? Y ¿Qué nombre recibe la gráfica describe esta función en el plano cartesiano?

4. Si ha transcurrido un tiempo t = 2 segundo, después de haberse pateado el balón. ¿A qué altura **h** se encuentra el balón en ese instante?

RESPONDE LAS PREGUNTAS 5 Y 6 DE ACUERDO LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

El entrenador del equipo al cual pertenece Alberto les hace una invitación de patear un balón desde y hasta un punto determinado. Los tiempos en segundo que tarda el balón en caer al piso se muestra a continuación :



Ordena los datos de menor a mayor y responde : **2, 4, 5, 3, 6, 3, 5**

5. El entrenador le dice a Alberto que él 50% de los lanzamientos la pelota tardó en caer un tiempo de 4 segundos o menos. ¿Esa afirmación que realiza el entrenador es correcta? Argumenta tu respuesta.

6. ¿Qué porcentaje de los tiempos fueron menor o igual a 3 segundos?

ACTIVIDAD 2: **CONCEPTULIZACIÓN.**

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una **función cuadrática** es una función de la **forma** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde $a, b\ y\ c\ \in R\ y\ a \neq 0$, donde x es la variable independiente y f(x) es la variable dependiente. La gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de **parábola.**

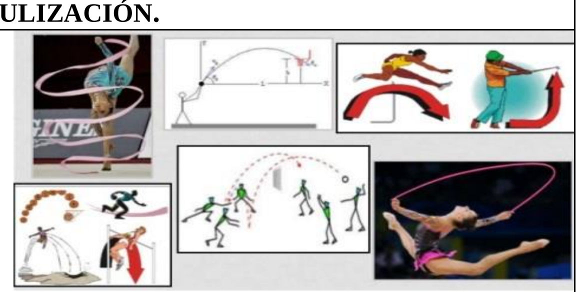


Imagen tomada de: https://image.slidesharecdn.com/parbola-140331152158-phpapp02/95/parbola-y-su-uso-21-638.jpg?cb=1396279383

El coeficiente $\boldsymbol{a}$ recibe el nombre de coeficiente cuadrático, y permite definir la concavidad en una parábola.

El coeficiente **b** recibe el nombre de coeficiente lineal.

El coeficiente $\boldsymbol{c}$ recibe el nombre de término independiente, el cual indica el punto de corte de la función con el eje y.

Ejemplo de función cuadrática

$A. f(x) = x^2 + 5x - 4$ B. $h(t) = -4t^2 + 5t$ C. $y = 2 - 3x^2$ D. $g(h) = \frac{2}{3}h^2$

Ejemplo

1. Dada las siguientes funciones cuadráticas identificar en cada caso los coeficientes a, b y c .

A. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 2}$ en esta función se puede identificar que:

$a = 1$ Debido a que este coeficiente corresponde al número que acompaña a la variable elevada al cuadrado (x^2).

b = - 3 Porque este coeficiente corresponde al número que acompaña a la variable elevada a exponente uno.

c = 2 por que este coeficiente corresponde al término independiente o constante de la función.

B. $\boldsymbol{f(t) = 4 - 3t^2}$

$a = -3$ Porque este coeficiente corresponde al valor que acompaña a la variable elevado al cuadrado.

b= 0 porque este coeficiente corresponde al número que acompaña a la variable con exponente uno y como este término, no se observa en la función su valor es cero.

c = 4 porque este coeficiente corresponde al termino independiente o constante.

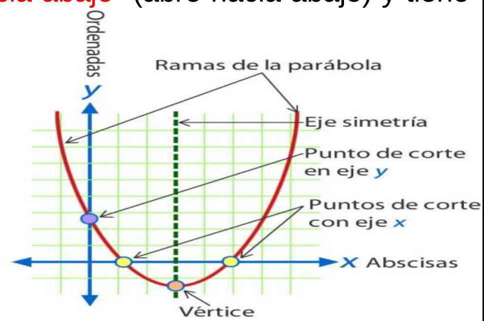
ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA.

La representación gráfica de una función cuadrática se conoce como parábola y cuenta con los siguientes elementos:

- Concavidad: si $\boldsymbol{a > 0}$**,** entonces la gráfica de f(x) es **cóncava hacia arriba** **(abre hacia** arriba) y tiene un mínimo en el vértice.

Si $a < 0$, entonces, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo (abre hacia abajo) y tiene un máximo en su vértice.

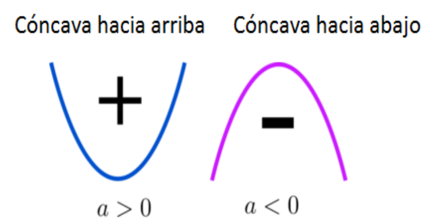
Imagen tomada de : https://storage.googleapis.com/portaleducativo-net-publica-g3p6/biblioteca/Funcion_cuadratica_2.jpg.



- **Vértice**: el vértice está ubicado en un punto de coordenadas (h, k)

  La coordenada del vértice con el eje x se calcula con la formula x = **h =** $-\frac{b}{2a}$

  La coordenada del vértice con el eje y se calcula con la fórmula $K = c - \frac{b^2}{4a}$ o también se puede calcular remplazando el valor de la coordenada del vértice en el eje x (h) en la función donde está x.



- **Eje de simetría**: Es la recta que divide la parábola en dos partes simétricas y su ecuación está dada por la expresión $x = -\frac{b}{2a}$

- **Cortes con los ejes.**

- **Corte con el eje y.** esta dado por el punto de coordenada (0, c), donde c es el termino independiente de la función.

- **Corte con el eje x**. Corresponden a la solución de la función, partir de la representación gráfica estos se pueden calcular factorizando o utilizando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo.

1. Calcular las coordenadas del vértice, el eje de simetría, el punto de corte de la función con el eje y y la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x$

Solución

Para calcular la coordenada del vértice, primero identificamos en la función los coeficientes de la función:

a = 1 b = 6 c = 0

- Para calcular las coordenadas del vértice, primero calculamos la coordenada en el eje x (h) mediante la siguiente expresión.

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2x1} = -3$, Componente de la coordenada del vértice en el eje x es -3.

Luego ,calculamos la componente de la coordenada en el eje y (k), el cual se puede calcular, remplazando el valor de (h) en la función, donde está x, así:

$$\boldsymbol{f}\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)= y = (-3)^2+6(-3) = -9$$

También este valor se puede calcular con la siguiente expresión:

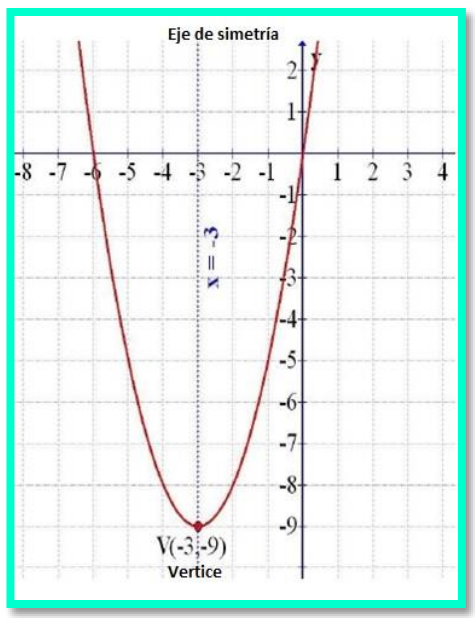
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}-\frac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{4a}}=0-\frac{(6)^2}{(4)(1)}=-\frac{36}{4}=-9$$

La coordenada del vértice de la parábola de la función dada es **V (-3, -9)**.

- El eje de simetría. Se calcula con la expresión **x =** $-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2*1}=-\frac{6}{2}=-3$ es valor es igual a la coordenada del vértice en el eje x (h). La ecuación del eje de simetría es x= - 3, lo que indica que por este valor de x pasa una recta vertical que divide a la parábola en dos partes iguales.
- Punto de corte de la parábola con el eje y. El punto de corte de la parábola con el eje y siempre corresponde a un punto que tiene como coordenada (0, C), por lo tanto como C es el termino independiente y su valor en la función es C= 0, la parábola corta al eje y en el punto de coordenada (0,0).

- La función f(x) = x^2+6x, se graficará para un intervalo de $-6\le x\le 0$

x	Y= F(x)= x^2+6x	Coordenada (x, y)
-6	$f(-6) = (-6)^2+6*(-6) = 36-36 = 0$	(-6, 0)
-5	$f(-5) = (-5)^2+6*(-5) = 25-30 = -5$	(-5,- 5)
-4	$f(-4) = (-4)^2+6*(-4) = 16-24 = -8$	(-4,- 8)
-3	$f(-3) = (-3)^2+6*(-3) = 9-18$	(-3, -9)
-2	$f(-2) = (-2)^2+6*(-2) = 4-12$	(-2, -8)
-1	$f(-1) = (-1)^2+6*(-1) = 1-6 = -5$	(-1, - 5)
0	$f(0) = (0)^2+6*(0) = 0-0 = 0$	(0,0)



2. Una pelota es lanzada hacia arriba a 48 $\frac{pie}{s}$ desde una plataforma que está a 100 pies de altura. Si la altura 8 h alcanzada por la pelota según el tiempo de vuelo (t) se modela mediante la siguiente función cuadrática es $\boldsymbol{h=-16t^2+48t+100.}$

A. Tiempo en que tarda la pelota en llegar a su máxima altura.

B. Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota (coordenada del vértice en el eje y).

Datos.

Función que modela el movimiento de la pelota: $\boldsymbol{h = -16t^2 + 48t + 100.}$

Coeficientes de la función: a= -16 b = 48 c = 1000
Preguntas:
Tiempo en el cual alcanza la máxima altura, este corresponde a la coordenada del vértice en el eje x, el cual se calcula con la expresión $-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2*a}}$
Máxima altura alcanzada corresponde a la coordenada del vértice en el eje y y se calcula con la expresión $\boldsymbol{f}\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2*a}}\right)$ o con la expresión $\boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{4*a}}$

Solución.

Es muy importante tener en cuenta que en toda situación que se modele mediante una función cuadrática y se pida calcular el punto máximo o mínimos, se hace necesario hallar las coordenadas del vértice. Donde la componente de la coordenada en el eje x del vértice corresponde a la variable independiente en este caso corresponde al tiempo en el cual alcanza la altura máxima y la componente de coordenada del vértice en el eje y corresponde a la altura máxima que alcanza la pelota.

A. El tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura corresponde a la coordenada del vértice en el eje x, debido a que el tiempo es la variable independiente y se ubica en el eje x, y la altura es la variable dependiente ya que depende del tiempo y se ubica en el eje y. **Nota**: 1 pies = 30,48 cm.

Coordenada del vértice en el eje X = Tiempo en el que alcanza la altura máxima = $-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} = -\frac{48}{2x16} = -\frac{48}{32} = 1{,}5$ segundo.

Tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura es de 1,5 segundos.

B. La máxima altura alcanzada, corresponde a la coordenada del vértice en el eje y. Esta se puede calcular remplazando el valor de la coordenada del vértice en el eje x , en la función en donde se ubica la variable x y se resuelve las operaciones indicadas, así:

Hmax = Coord. del vértice en el eje y = $f(1{,}5) = -16\,(1{,}5)^2 + 48 * 1{,}5 + 100$, resolviendo las operaciones indicadas se obtiene como resultado:

Coordenada del vértice en el eje y = Hmax= 136 pies.
Si no deseas calcularlo de esta forma puedes calcular este mismo valor de esta forma :

Coordenada del vértice en el eje y = H Max = $\boldsymbol{c - \frac{b^2}{4a}}$ **= 100 -** $\frac{(48)^2}{(-4)*(16)}$ **= 100 -** $\frac{2304}{-64}$ **= 100 + 36** = 136 pies

La pelota a tarda 1,5 segundos en alcanzar su altura máxima de 136 pies.

RESPONDER LAS PREGUNTAS 3 Y 4 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Una empresa de fabricación y venta de balones, calcula sus ganancias mediante la siguiente función $\boldsymbol{G(x) = -200x^2 + 80.000x}$. Si **x** representa el número de balones fabricados y vendidos y **G(x),** representa las ganancias obtenidas por dicha empresa por producir y vender un número x de balones.

2. ¿Cuál es la ganancia que obtienen la empresa por fabricar y vender 50 balones?

Datos

La variable independiente (x): Número de balones.

La variable dependiente (y) : Ganancias por la venta de los balones

$a = -200$ b = - 80.000 c = 0

Número de balones fabricados y vendidos: x : 50

Ganancias por fabricar y vender 50 balones: G (50): ?

Para calcular la ganancia por producir y vender 50 balones es necesario remplazar en la función el número de balones fabricados y vendidos x= 50 y se resuelven las operaciones indicadas, así:

G(50) = - 200*$(50)^2 - 80.000\ (50)$ = - 500.000 + 4.000.000 = 3.500.000

Las ganancias que obtiene la empresa por vender 50 balones son de $3.500.000.

3. ¿Cuál es el número de balones x que se debe producir y vender para obtener las máximas ganancias? (componente del vértice en el eje x).

Para calcular el número de balones que se debe vender para obtener la máxima ganancia se realiza el siguiente procedimiento:

de balones que se debe fabricar y vender para obtener ganancias máximas = $-\frac{b}{2*a}$ = $-\frac{(80.000)}{(-2)*(200)} = \frac{80.000}{400} = 200$

El número de balones que se debe producir y vender para obtener la máxima ganancia es x= 200 balones.

4. ¿Cuál es ganancias máximas que se puede obtener?

El número de balones que se debe vender para obtener la máxima ganancia es de x= 200 por tanto las ganancias máximas se obtiene remplazando el valor de x = 200 en la función:

Ganancias máximas= G(4) = 200*$(200)^2 - 80.000\ (200)$ = 8.000.000 – 16.000.000 = 8.000.000

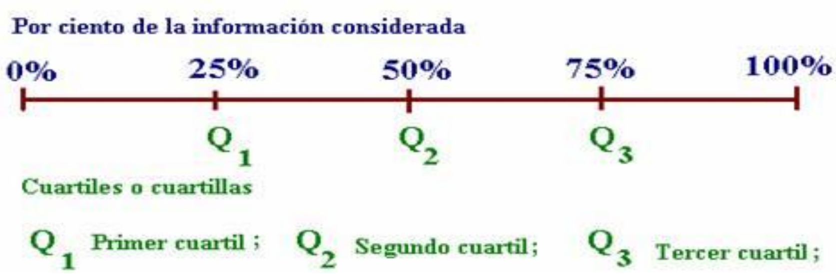
La máxima ganancia la obtiene la empresa es de \$8.000.000 y se obtiene cuando vende 200 balones.

MEDIDAS DE POSICIÓN

Son números que dividen el conjunto de datos en partes iguales y se usan para clasificar una observación dentro de una población o muestra. Dentro de estas medidas se encuentran los cuartiles, deciles y percentiles.

- **Cuartiles $\boldsymbol{Q_1, Q_2, Q_3}$** : son los datos que dividen el conjunto de datos en cuatro partes iguales, por tanto, hay 3 valores que representan el 25% (Q_1), el 50% que representa el Q_2, y el 75% de los datos que representan al Q_3.

Q_1 = valor que deja por debajo el 25% de los datos y por encima el 75% restante.
Q_2 = Valor que deja por debajo el 50% de los datos y por encima el otro 50%.
Q_3= Valor que deja por debajo el 75% de los datos y por encima el 25% restante.



- **Deciles** D_1, D_2, D_3, D_4, D_4 , D_5, D_6, D_7, D_8, D_9 , D_{10} : Son valores de los datos que dividen el conjunto de datos en 10 partes iguales, cada uno representa el 10% de la distribución.

D_1= Valor que deja por debajo el 10% de los datos y por encima el 90% restante, D_2 = valor que deja por debajo el 20% de los datos y por encima el 80% restante y así sucesivamente, hasta el D_9 que deja por debajo el 90% de la distribución y por encima el 10%.

- **Percentiles:** $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_k, \ldots, p_{99}$: Son los valores de los datos que dividen el conjunto de datos en 100 partes iguales.

p_1= Valor que deja por debajo el 1% de los datos y por encima el 99% restante.
p_8 = Valor que deja por debajo el 8% de los datos y por encima el 92% restante.

Para un número n de datos, para identificar la posición de los cuartiles, deciles y percentiles, es necesario ordenar los datos de menor a mayor (en orden ascendente)

Para calcular los cuartiles, deciles y percentiles, se debe tener en cuenta la información dada en la siguiente tabla:

n par	$\frac{k*n}{A}$	Si al realizar el cálculo de la posición de la medida de posición (cuartil, decil y percentil), si el resultado es exacto el dato ubicado en esta posición se promedia con el dato siguiente (Es decir se suman y se divide entre dos, si el resultado es un número decimal se aproxima al entero más cercano.
n impar	$\frac{k*(n+1)}{A}$	**Cuartil: K**: Número de cuartil, es decir, 1, 2 o 3. **N**: número de divisiones del conjunto de datos y **A**= 4. **Decil**: K : número del decil 1, 2, 3,…9 y A = 10 **Percentil :** K: Número del percentil, 1,2,3,4…, 99 y A = 100

Ejemplo
Una empresa que fabrica y vende balones durante 15 día registra el número de balones vendidos, los resultados son:
87, 45, 56, 90, 102, 48, 98, 63, 48, 120, 65, 98, 86, 94, 125

1. Calcular el cuartil Q_3 Y plantear conclusiones a partir del resultado obtenido.

Datos
K= 3 por ser el cuartil 3
A= 4 número de divisiones del conjunto de datos (porque el cuartil divide el número de datos en cuatro partes)

Para calcular las medidas de posición primero se debe ordenar los datos de menor a mayor:

45, 48, 48, 56, 63, 65, 86, 87, 90, 94, 98, 98, 102, 120, 125

Como el número de datos es n = 15, se utiliza la fórmula

Posición del cuartil $Q_3 = \frac{k*(n+1)}{A} = \frac{3*(15+1)}{4} = \frac{3*16}{4} = \frac{48}{4} = 12$

Como el resultado es un número par se toma el dato ubicado en la posición 12 que es 98 y se suma con el dato siguiente 102 , este resultado se divide entre 2, así:

45, 48, 48, 56, 63, 65, 86, 87, 90, 94, 98**, 98, 102**, 120, 125

$$Q_3 = \frac{98+102}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

El 75% de los días se vendió 100 balones o menos , 25 % de los días se vendieron 100 balones o más

2. Calcular el decil D_6

Datos

Número de datos : n = 15 es impar
Posición del decil: K = 6
Número de divisiones A= 10

Como el número de datos es impar se utiliza la siguiente fórmula para calcular la posición del D_6
Para calcular la posición del decil $D_6 = \frac{k*(n+1)}{A} = \frac{6*(15+1)}{10} = \frac{6*16}{10} = 9,6$

Como el resultado es un número decimal, la posición se aproxima al entero más cercano, en este caso el entero más cercano a 9,6 es 10, lo que quiere decir que el D_6 es el número ubicado en la posición 10. Se busca en los datos ordenado el número que está ubicado en la posición 10.
45, 48, 48, 56, 63, 65, 86, 87, 90, **94,** 98, 98, 102, 120, 125

Por lo tanto se puede concluir que el 60% de los días se vende un número de balones de 94 o menos y el 40% de los días se vende un número de balones igual o mayor de 94.

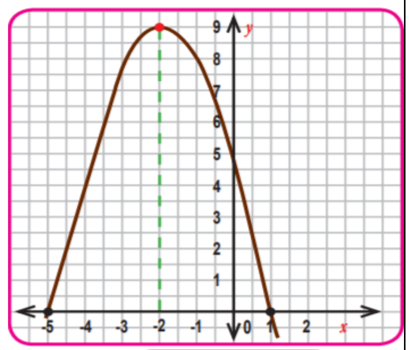
ACTIVIDAD 3: APLICACIÓN Y EVALUACIÓN

1. Dada la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, determinar la concavidad, las coordenadas del vértice, la tabla de valores y la representación gráfica en el plano cartesiano.

RESPONDE LAS PREGUNTAS 2 Y 3 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

Dada la representación gráfica de la función (ver imagen).

2. Identifica y argumenta cuál de las siguientes expresiones algebraica permite representar la función representada en la gráfica (ver imagen).



A. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ B. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

C. $f(x) = -x^2 + 5$ D. $(x) = -x^2 + 4x - 5$

https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf

3. Dada la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, determinar la concavidad, las coordenadas del vértice, la tabla de valores y la representación gráfica en el plano cartesiano.

RESPONDER LAS PREGUNTAS 4, 5 y 6 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

Una fábrica de camisetas deportivas determina sus ingresos I, en pesos, de acuerdo a la siguiente función $\boldsymbol{I(x) = 20.000x - 50x^2}$, donde x representa el número de camisetas vendidas.

4. ¿Cuál es el ingreso se la empresa cuando vende un número de camiseta x = 45?

5. ¿Cuántas camisetas se deben vender para obtener el ingreso máximo mensual?

6. ¿Cuál será el ingreso máximo mensual?

RESPONDE LAS PREGUNTAS 7 Y 8 DE ACUERDO DE LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

El director técnico de una se realiza un entrenamiento a campo abierto para saber la potencias y la longitud horizontal que recorre un balón pateado de un punto determinado, el lanzamiento lo realizaron 20 jugadores, los resultados de las distancias en metros, se muestran a continuación.

8, 5, 12, 24, 32, 23, 12, 8, 30, 26, 24, 12, 40, 38, 6, 17, 24, 15, 20, 37.

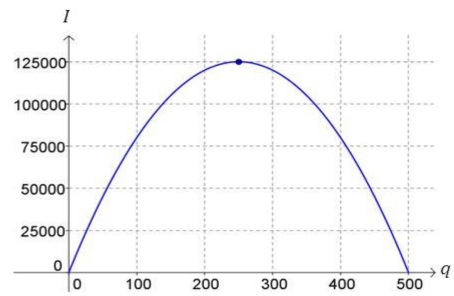
7. Determinar el cuartil Q_1 y el cuartil Q_3 y a partir del resultado obtenido plantear una conclusión.

8. Determinar D_9 y plantea una conclusión a partir del resultado obtenido.

RESPONDER LAS PREGUNTAS 9 Y 10 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

La representación gráfica permite representar el comportamiento de los ingresos de una empresa en función del número de productos vendidos.

9. ¿Cuál o cuáles son el número de producto que la empresa debe vender para que esta se encuentre en su punto de equilibrio? Nota: punto de equilibrio es ese punto donde la empresa no presenta ni ganancias ni perdida.



10. ¿Cuál debe ser el número de productos vendidos para que la empresa obtenga el máximo ingreso y cuál es el máximo ingreso alcanzado?

FUENTES DE CONSULTA

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales-JS-apli/3eso_quincena10_apli.pdf
https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/contenidoslo
Plan de Área de matemáticas. I.E. Héctor Abad Gómez. 2017.
M.E.N.; Derechos Básicos de aprendizajes. Bogotá D.C.; 2015.
M.E.N.; Estándares Básicos de Competencia. Bogotá. 2006.
M.E.N. Lineamientos curriculares; Bogotá; 1998.
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/anexo_7-matriz_de_referencia_matematicas.pdf
Quintero, Luis E; Conocimiento para el saber 10; Editorial los tres editores S.A.S; Cali – Valle; 2014.
López Héctor; Moreno Vladimir; Oscar Espinel; Maluendas Pedro Nel; Silva, Luz Helena; Avanza matemáticas 10; Editorial Norma; 2015; Bogotá.
https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap8.pdf