

|                                                                                   |                                              |           |       |            |       |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------|-------|------------|-------|----------|
|  | <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA PRESENTACIÓN</b> |           |       |            |       |          |
|                                                                                   | NOMBRE ALUMNA:                               |           |       |            |       |          |
|                                                                                   | ÁREA / ASIGNATURA: Matemática                |           |       |            |       |          |
|                                                                                   | DOCENTE: ÉDISON MEJÍA MONSALVE               |           |       |            |       |          |
|                                                                                   | PERIODO                                      | TIPO GUÍA | GRADO | Nº         | FECHA | DURACIÓN |
| II                                                                                | APRENDIZAJE                                  | 10º       | 4     | 26/04/2023 |       |          |

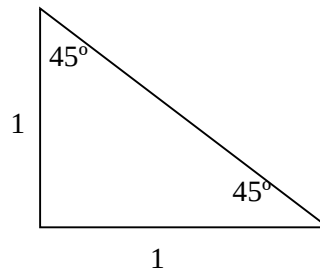
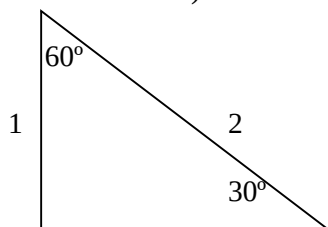
## INDICADOR DE DESEMPEÑO

- *Aplica las razones trigonométricas para hallar el valor numérico de expresiones trigonométricas, empleando los ángulos notables.*
- *Resuelve situaciones planteadas con ángulos cuadrantales, para emplear las definiciones circulares.*

### ANGULOS ESPECIALES.

Son aquellos cuyas funciones trigonométricas se pueden calcular fácilmente por geometría sin necesidad de hacer uso de tablas ni calculadoras; estos ángulos son los **notables** y los **cuadrantales**.

- **Ángulos notables** son los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  ( $\pi/6$ ,  $\pi/4$  y  $\pi/3$  respectivamente). Para calcular sus funciones trigonométricas es necesario hacer uso de los siguientes triángulos (que se consideran como fórmulas):



### Ejemplos:

- Complete la siguiente tabla:

| $\theta$ en grados | $\theta$ en radianes | Sen $\theta$         | Cos $\theta$ | Tan $\theta$ | csc $\theta$ | Sec $\theta$ | cot $\theta$ |
|--------------------|----------------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $30^\circ$         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{1}{2}$        |              |              |              |              |              |
| $45^\circ$         | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |              |              |              |              |              |
| $60^\circ$         | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |              |              |              |              |              |

- 

a. Verifico que: 
$$\frac{4\cos^2 60^\circ}{2\sin 30^\circ + \cot^2 60^\circ \sec 60^\circ} = \frac{3}{5}$$

b. Verifico que:  $\frac{\cot 30^\circ - 4 \operatorname{sen} \pi / 4}{2 \tan \pi / 3} = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{6}$

## ACTIVIDAD NÚMERO 1

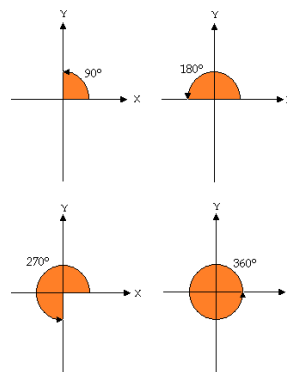
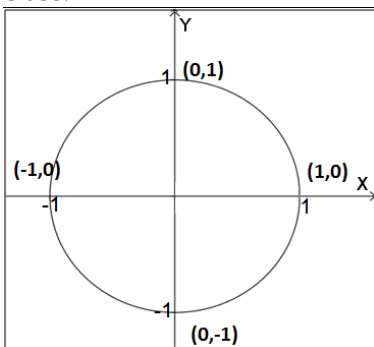
En los problemas 3 a 22, obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use la calculadora.

3.  $\cos^2 \frac{\pi}{3}$
4.  $\tan^2 \frac{\pi}{6}$
5.  $\sec 45^\circ \csc 45^\circ$
6.  $\operatorname{sen} 60^\circ \cos 30^\circ$
7.  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4}$
8.  $6 \sec \frac{\pi}{3} \csc \frac{\pi}{6}$
9.  $9 \sec 45^\circ \csc 45^\circ$
10.  $\tan 60^\circ \cot 30^\circ$
11.  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$
12.  $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$
13.  $6 \tan 30^\circ + 7 \tan 60^\circ$
14.  $3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4}$
15.  $\tan 45^\circ - \cot 45^\circ$
16.  $\sec^2 \frac{\pi}{4} + 4 \csc^2 \frac{\pi}{3}$
17.  $\frac{8 \operatorname{sen}(\pi/4)}{\sec(\pi/3)}$
18.  $\frac{2 - \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}$
19.  $\operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ$
20.  $2 + \cot^2 30^\circ - 10 \csc^2 30^\circ$
21.  $\frac{\tan(\pi/4) - \tan(\pi/6)}{1 + \tan(\pi/4)\tan(\pi/6)}$
22.  $\frac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)}$

- **Ángulos cuadrantales.**

Se les llama **ángulos cuadrantales** a aquellos **ángulos** que tienen su lado terminal en algunos de los cuatro cuadrantes o ejes coordenados del plano cartesiano, son los **ángulos** de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ .

Para calcular las funciones trigonométricas en los ángulos cuadrantales, se hace del siguiente triángulo unitario tal y como lo mostrara el profesor en clase.



**Ejemplos:**

1. Complete la siguiente tabla:

| $\theta$ en grados | $\theta$ en radianes | Sen $\theta$ | Cos $\theta$ | Tan $\theta$ | csc $\theta$ | Sec $\theta$ | cot $\theta$ |
|--------------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $0^\circ$          | 0                    | 0            | 1            | 0            | inde         |              |              |
| $90^\circ$         | $\frac{\pi}{2}$      | 1            | 0            | Inde         | 1            |              |              |
| $180^\circ$        | $\pi$                | 0            | -1           | 0            | inde         |              |              |
| $270^\circ$        | $\frac{3\pi}{2}$     | -1           | 0            | inde         | -1           |              |              |
| $360^\circ$        | $2\pi$               | 0            | 1            | 0            | inde         |              |              |

**Identidades trigonométricas fundamentales**

**Recíprocas**

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\csc x * \sin x = 1$$

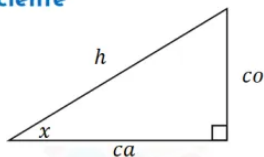
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sec x * \cos x = 1$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cot x * \tan x = 1$$

**Cociente**



$$\sin x = \frac{co}{h} \quad \cos x = \frac{ca}{h}$$

$$co = h * \sin x \quad ca = h * \cos x$$

$$\tan x = \frac{co}{ca} \quad \cot x = \frac{ca}{co}$$

$$\tan x = \frac{h * \sin x}{h * \cos x} \quad \cot x = \frac{h * \cos x}{h * \sin x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

**Pitagóricas**

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

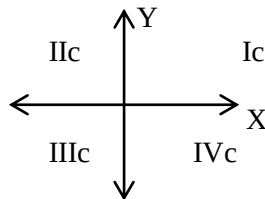
$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

- **Ángulos de referencia.**

Después de haber estudiado los ángulos especiales (notables y cuadrantales), pasas ahora a estudiar la forma de hallar las funciones trigonométricas de ángulos mayores de  $90^\circ$  haciendo uso del ángulo de referencia. Para ello necesitarás de algunos conceptos nuevos que a lo largo del estudio responsable de la presente guía irás conociendo y aprenderás a manejar.

### Funciones trigonométricas de ángulos entre $90^\circ$ y $360^\circ$ (ángulo de referencia)

Los dos ejes del plano cartesiano lo dividen en cuatro partes llamadas cuadrantes que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido positivo de los ángulos) partiendo siempre desde el semieje positivo de las Xs, así:



Ic: Primer cuadrante;

IIc: Segundo cuadrante;

IIIc: Tercer cuadrante;

IVc: Cuarto cuadrante;

si  $\alpha \in Ic$  entonces  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

si  $\alpha \in IIc$  entonces  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

si  $\alpha \in IIIc$  entonces  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

si  $\alpha \in IVc$  entonces  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Nuestro objetivo es el de hallar las funciones trigonométricas de ángulos comprendidos entre  $90^\circ$  y  $360^\circ$ , pero para ello es necesario tener en cuenta el signo de las funciones en cada uno de los cuadrantes.

Las funciones trigonométricas son positivas en dos cuadrantes y negativas en los otros dos; la siguiente tabla nos muestra los signos de estas funciones en cada cuadrante.

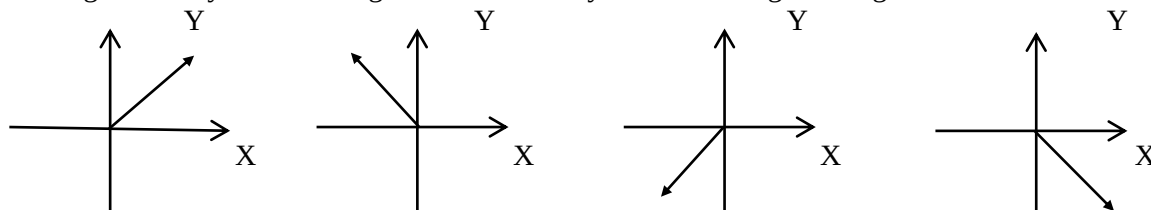
| Función   | Ic | IIc | IIIc | IVc |
|-----------|----|-----|------|-----|
| Sen y Csc | +  | +   | -    | -   |
| Cos y Sec | +  | -   | -    | +   |
| Tan y Cot | +  | -   | +    | -   |

De la tabla puedes observar, por ejemplo, que las funciones seno y cosecante son positivas en el primer y segundo cuadrante y son negativas en el tercero y cuarto.

Para calcular las funciones trigonométricas de ángulos comprendidos entre  $90^\circ$  y  $360^\circ$  se emplea el ángulo de referencia.

- **Ángulo de referencia ( $X_r$ ):** Es el **ángulo agudo** formado entre el eje X y el lado terminal del ángulo dado ubicado en posición normal.

Sea X el ángulo dado y sea  $X_r$  el ángulo de referencia y observa las siguientes gráficas:



PRIMER CUADRANTE

SEGUNDO CUADRANTE

TERCER CUADRANTE

CUARTO CUADRANTE

De acuerdo a las gráficas anteriores puedes observar que para hallar el ángulo de referencia  $X_r$  empleamos las siguientes fórmulas para cada uno de los cuadrantes donde se encuentra el ángulo X dado:

|                                                 |
|-------------------------------------------------|
| Si $X \in I^c$ entonces $X_r = X$               |
| Si $X \in II^c$ entonces $X_r = 180^\circ - X$  |
| Si $X \in III^c$ entonces $X_r = X - 180^\circ$ |
| Si $X \in IV^c$ entonces $X_r = 360^\circ - X$  |

Estas fórmulas nos indican por ejemplo que si nos dan el ángulo de  $120^\circ$  como su lado terminal está en el segundo cuadrante entonces el ángulo de referencia será:  $X_r = 180^\circ - X$  ó sea:  $X_r = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  y las funciones trigonométricas de  $120^\circ$  serán las mismas funciones del ángulo de  $60^\circ$  (ángulo de referencia) pero colocándoles el signo del cuadrante al cual pertenece  $120^\circ$  (en este caso segundo cuadrante).

Si nos dan el ángulo de  $330^\circ$  su lado terminal está en el cuarto cuadrante y su ángulo de referencia será:  $X_r = 360^\circ - X$  ó sea  $X_r = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ .

**Por lo tanto, para calcular las funciones trigonométricas de un ángulo comprendido entre  $90^\circ$  y  $360^\circ$  se procede así:**

- Se analiza en qué cuadrante está el lado terminal del ángulo dado.
- Se calcula el ángulo de referencia para dicho ángulo de acuerdo al cuadrante y con las fórmulas dadas anteriormente.
- Se calculan las funciones trigonométricas del ángulo de referencia y estas funciones serán las mismas del ángulo dado, colocándole al resultado el signo de la función pedida de acuerdo al cuadrante donde esté el ángulo dado.

**Por ejemplo** si nos piden calcular  $\csc 210^\circ$  se procede así:

- Miramos en qué cuadrante está  $210^\circ$  y nos damos cuenta que está en el IIIc.
- Buscamos el ángulo de referencia para el IIIc así:  $X_r = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$ .
- Esto significa que  $\csc 210^\circ = -\csc 30^\circ = -2$  y es negativa porque en el tercer cuadrante la función cosecante es negativa (por esto se le coloca el menos).

**De igual forma** y siguiendo el análisis anterior calculemos  $\cot 135^\circ$ .

$135^\circ \in \text{IIc}$ , por lo tanto  $X_r = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ; por esto  $\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$  y da negativa porque en el segundo cuadrante la función cotangente es negativa (por esto se le coloca el menos).

**Ejemplo:**

Hallar el valor numérico de:

$$\sec 210^\circ + \tan 120^\circ + \csc^2 315^\circ$$

## ACTIVIDAD NÚMERO 2.

En los problemas 37 a 52, obtenga el valor exacto de la expresión dada.

37.  $\cos 5\pi$

38.  $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

39.  $\cot \frac{13\pi}{6}$

40.  $\tan \frac{9\pi}{2}$

41.  $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

42.  $\cos \frac{23\pi}{4}$

43.  $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

44.  $\tan \frac{23\pi}{4}$

45.  $\sec (-120^\circ)$

46.  $\csc 495^\circ$

47.  $\sin 150^\circ$

48.  $\cos (-45^\circ)$

49.  $\tan 405^\circ$

50.  $\sin 315^\circ$

51.  $\cot (-720^\circ)$

52.  $\sec (-300^\circ)$

