

	<b>INSTITUCION EDUCATIVA LA PRESENTACION</b>				
	NOMBRE ALUMNA:				
	AREA :		MATEMÁTICAS		
	ASIGNATURA:		MATEMÁTICAS		
	DOCENTE:		JOSÉ IGNACIO DE JESÚS FRANCO RESTREPO		
	TIPO DE GUIA:		DE APRENDIZAJE		
	PERIODO	GRADO	N°	FECHA	DURACION
3	11	9	JULIO 27 DE 2021	4 UNIDADES	

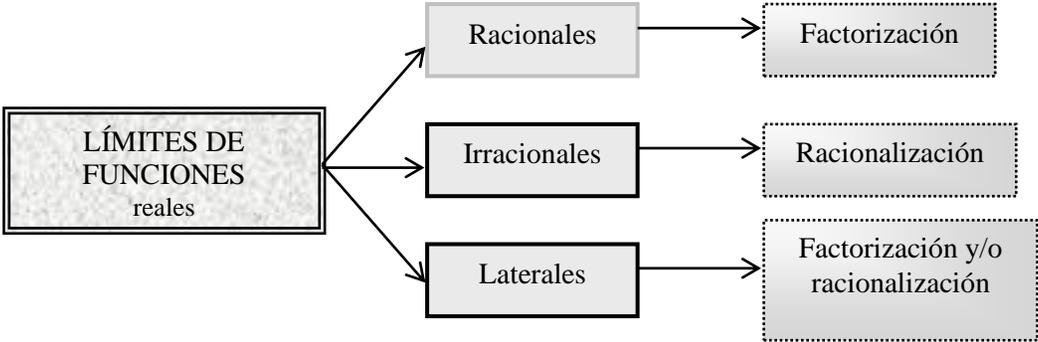
<b>INDICADORES DE DESEMPEÑO</b>	
♣	Determina adecuada límites de funciones racionales haciendo uso de los teoremas y de la factorización.
♣	Soluciona correctamente las actividades propuestas por el profesor.

**LÍMITES DE FUNCIONES REALES:  
DEFINICIÓN y TEOREMAS**

Una vez terminado el trabajo en el segundo período con todo lo relacionado con las funciones reales y sus aplicaciones, pasas ahora a manejar uno de los conceptos más fundamentales que tiene el cálculo como es la teoría de límites.

Los conocimientos que vas adquiriendo van enlazados unos con otros y son muy importantes tanto para tu desarrollo intelectual como para la aplicación en próximos conceptos matemáticos tanto aquí en el colegio como en tu universidad. Es así, por ejemplo, como el concepto de límite nos llevará al estudio de otros de los temas fuertes del cálculo como lo es la derivada cuyo estudio realizarás en el último período.

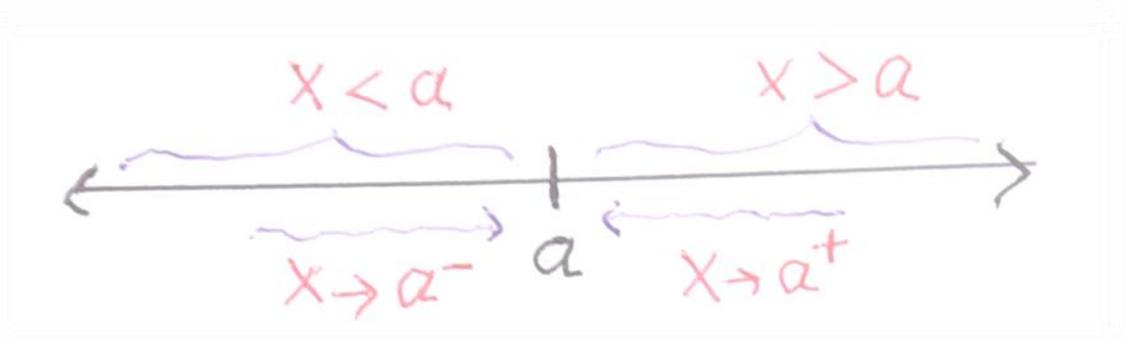
Continúa adelante con tu trabajo que ya falta muy poco para que logres alcanzar una meta más en otra etapa esencial de tu vida.



⊛ **Definición intuitiva de límite:** Sea  $Y = f(x)$  una función cualquiera y sean  $a$  y  $L$  dos números reales, queremos analizar el comportamiento que tiene la función  $y = f(x)$  a medida que la variable  $X$  se acerca o se aproxima al número real  $a$ .

$X$  se puede aproximar al número  $a$  por dos lados: por la izquierda de  $a$  (o sea  $x$  tomando valores ligeramente menores que  $a$ ) o por la derecha de  $a$  (o sea  $x$  tomando valores ligeramente mayores que  $a$ ).

- A medida que  $X$  se aproxima por la izquierda de  $a$  ( $x < a$ ) tomando valores ligeramente menores que  $a$  pero muy cercanos, decimos que  $X \rightarrow a^-$  (y se lee “ $x$  tiende a  $a$  por la izquierda”)
- A medida que  $X$  se aproxima por la derecha de  $a$  ( $x > a$ ) tomando valores ligeramente mayores que  $a$  pero muy cercanos, decimos que  $X \rightarrow a^+$  (se lee “ $x$  tiende a  $a$  por la derecha”)



- Si a medida que  $X \rightarrow a^-$  la función  $y = f(x)$  toma valores muy cercanos al número  $L$ , decimos que:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	(límite lateral por la izquierda de $a$ ).
-------------------------------------	--

- Si a medida que  $X \rightarrow a^+$  la función  $y = f(x)$  toma valores muy cercanos también al número  $L$ , decimos que:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	(límite lateral por la derecha de $a$ ).
-------------------------------------	--

En este caso como los dos límites laterales son iguales (o sea ambos dan el mismo número  $L$ ), entonces decimos que el límite total existe y es igual a dicho número  $L$  y escribimos que:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
-----------------------------------

**CONCLUSIÓN IMPORTANTE:** El límite total existe cuando los dos límites laterales existen y son iguales.

**NOTA IMPORTANTE:** Sencillamente el límite es el valor que toma la función Y cuando x se aproxima a un valor real dado.

En tus cursos de cálculo universitario podrás analizar con todo el rigor matemático el concepto del límite.

Ahora bien, para hallar el límite con tendencia a real de una función no siempre es necesario calcular los límites laterales; para ello es suficiente con tener presente los **TEOREMAS** que a continuación se te dan y que tú analizarás detenidamente:

\* **TEOREMA 1: Unicidad del límite:** El límite de una función si existe debe ser único e igual a un número real.

\* **TEOREMA 2: Límite de la función constante:** El límite de una función constante (o sea de un número) es igual al mismo número, es decir, sea  $f(x) = \#$ ,

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \# = \#$$

**Ejemplos:** a.  $\lim_{x \rightarrow 2} 9 = 9$  ; b.  $\lim_{x \rightarrow -5} (-7/3) = -7/3$  ; c.  $\lim_{m \rightarrow 3} 5ab^2 = 5ab^2$

\* **TEOREMA 3: Límite de la función polinómica:** El límite de una función polinómica lo calculas reemplazando en el polinomio a la variable por su tendencia y el resultado es el límite, es decir, sea  $Y = f(x)$  con  $f(x)$  polinómica, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Ejemplo:**  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4x - 7) = 3(2)^2 + 4(2) - 7 = 13$

\* **TEOREMA 4: Límite de una potencia o de una raíz con base o cantidad subradical polinomios:**

Se procede de igual forma que en el **teorema 3 anterior**, es decir, sea  $Y = f(x)$  un polinomio, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = [f(a)]^p} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(a)}}$$

Ejemplo: a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [8x^2 - 5x + 3]^3 = [8(1/2)^2 - 5(1/2) + 3]^3 = [2 - 5/2 + 3]^3 = 125/8$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x^2 - 4x + 5} = \sqrt[3]{2(2)^2 - 4(2) + 5} = \sqrt[3]{8 - 8 + 5} = \sqrt[3]{5}$

\* **TEOREMA 5: Límite de la función racional:**

Sea  $Y = N(x) / D(x)$  una función racional (donde el numerador y el denominador son polinomios), entonces:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} N(x) / D(x) = N(a) / D(a) \text{ siempre y cuando } D(a) \neq 0}$$

Este teorema en palabras quiere decir lo siguiente: Para tomarle el límite a una función racional se reemplaza mentalmente en el denominador a la variable por la tendencia efectuando la operación indicada. Si el resultado da cero entonces también se reemplaza en el numerador a la variable por la tendencia y se hace de igual manera la operación indicada; si en el numerador también da cero entonces es necesario factorizar tanto el numerador y el denominador (si es posible) y se simplifica la fracción resultante (tal como simplificas fracciones algebraicas) y luego reemplazas a la variable por la tendencia y el resultado es el límite, pero si en el numerador no da cero significa que el límite no existe. Ahora bien, si el denominador no da cero entonces no necesitas factorizar sino que reemplazas directamente a la variable por la tendencia en toda la función racional y el resultado es el límite.

**NOTA:** Cuando te planteen el límite de la suma y/o resta de varias fracciones racionales, es pertinente efectuar primero las operaciones indicadas para obtener una sola fracción y luego se aplica este **teorema 5**.

\* **TEOREMA 6: Límite de la función irracional:** Lo estudiaremos detalladamente en la guía N° 10.

Veamos a continuación algunos ejemplos de límites aplicando los teoremas anteriores haciendo hincapié en las funciones racionales.

**EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES**

1. *Muy atenta estaré al cálculo de los siguientes límites que explicará mi profesor en clase aplicando los teoremas ya vistos:*

a.  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{5x^2 - 3x + 7} = \sqrt{5(-1)^2 - 3(-1) + 7} = \sqrt{5(1) + 3 + 7} = \boxed{\sqrt{15}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x-1)}{x(x-2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x} = \frac{3(2)-1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$

$\begin{aligned} * 3x^2 - 7x + 2 &= (3x-6)(3x-1) \\ &= \frac{(3x-6)(3x-1)}{3} \\ &= \frac{3(x-2)(3x-1)}{3} \end{aligned}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x - 2x^3}{x^2 - 3x + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(4-x^2)}{(x-2)(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(2+x)(2-x)}{(x-2)(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(2+x)\cancel{(x-2)}}{(x-2)(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} - \frac{2x(2+x)}{x-1}$

$= - \frac{2(2)(2+2)}{2-1}$

$= \boxed{-16}$

$$\begin{aligned}
 d. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{x^2 - 5x} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5+x)(5-x)}{x(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5+x)(\cancel{5-x})}{x(\cancel{5-x})} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} -\frac{5+x}{x} \\
 &= -\frac{5+5}{5} = \boxed{-2}
 \end{aligned}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow 7} \left( \frac{x^2}{x-7} + \frac{49}{7-x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \left( \frac{x^2}{x-7} - \frac{49}{x-7} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x-7} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x+7)(\cancel{x-7})}{\cancel{x-7}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+7}{1} = 7+7 = \boxed{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2}{x-2} + \frac{4}{2-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{1} = 2+2 = \boxed{4}
 \end{aligned}$$

$$g. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}{x-3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x-3}{3x}}{x-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{3x} \\
 &= \frac{1}{3(3)} = \boxed{\frac{1}{9}}
 \end{aligned}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x^2 - 16}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{4-x}{4x}}{\frac{x^2-16}{1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{4x(x^2-16)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{4x(x+4)(x-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{4x(x+4)\cancel{(x-4)}}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1}{4x(x+4)} \\
 &= -\frac{1}{4(4)(4+4)} \\
 &= -\frac{1}{16(8)} \\
 &= \boxed{-\frac{1}{128}}
 \end{aligned}$$

$$i. \lim_{m \rightarrow 0} \frac{(3+m)^2 - 9}{m}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{(3+m)^2 - 9}{m} \quad ; \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\cancel{9} + 6m + m^2 - \cancel{9}}{m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{6m + m^2}{m} \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m(6+m)}{m}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{6+m}{1} \\
 &= 6 + 0 \\
 &= \boxed{6}
 \end{aligned}$$

$$j. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^3 - 8}{h^2 + 3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^3 - 8}{h^2 + 3h}; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2)^3 - 3(2)^2(h) + 3(2)(h)^2 - h^3 - 8}{h^2 + 3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{8} - 12h + 6h^2 - \cancel{h^3} - 8}{h^2 + 3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12h + 6h^2 - h^3}{h^2 + 3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-12 + 6h - h^2)}{h(h+3)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12 + 6h - h^2}{h+3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-12 + 6(0) - (0)^2}{0 + 3} \\ &= -\frac{12}{3} \\ &= \boxed{-4} \end{aligned}$$

$$k. \lim_{x \rightarrow f(0)} f(x), \quad \text{Sabido que } f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow f(0)} f(x); \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 9}{0 - 3} = 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{1} = \frac{3+3}{1} = \boxed{6}$$



Desde aquí puedo observar que Colombia también tiene límites...  
¿Tendrá que ver esto con lo que estamos estudiando?  
¿Tú qué piensas?

**2. En mi casa muy concentrada trabajo los siguientes límites (LOS PUEDO IR TRABAJANDO EN LOS DÍAS QUE ME QUEDE EN CASA):**

Enviaré las dudas que tenga al correo de mi profe.

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 5x + 6} = 9$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - 27} = \frac{2}{3}$$

$$3. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h} = 8$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x - x^3} = -\frac{3}{2}$$

$$5. \lim_{z \rightarrow -4} \frac{11z - 4 + 3z^2}{2z^2 + 9z + 4} = \frac{13}{7}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -5} \left( \frac{x^3}{x-5} + \frac{125}{5-x} \right) = 75$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{7}}{x^2 - 49} = \frac{1}{686}$$

$$8. \text{Sea } g(y) = \frac{y^2 - 16}{y - 4}. \text{ Entonces } \lim_{y \rightarrow g(0)} g(y) \text{ es igual a:}$$

*“Si te rodeas de personas que son luz,  
lo verás todo más claro”*