Institución Educativa Abraham Reyes

Guías de Trabajo

I Periodo Académico

Guía De Matemáticas 8°

Juan Camilo Lopera Email: matematicascamilolopera@gmail.com

Las asesorías se darán de acuerdo a el horario asignado y se hará por la plataforma Zoom, el enlace se les enviará a cada grupo de trabajo. El trabajo se hace en el cuaderno y en lo posible se envía al correo por medio de Meet.

Temporalidad: Marzo 19 de 2021

NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales, es decir los números que se pueden escribircomo razones de dos números enteros, han tenido una historia muyinteresante. En un momento la humanidad llegó a pensar que consólo los números racionales se podían realizar todos los razonamientospropios de la matemática. ¡Nada más lejos de la verdad! En laProposición 1 de los Elementos de Euclides se describe cómo construirun triángulo equilátero sobre un segmento de recta. En la demostraciónEuclides comete el error de suponer que dos circunferencias se cortan, esdecir, tienen un punto común. La “demostración” de Euclides consistede una construcción en la que se trazan, desde cada extremo delsegmento dado, dos arcos de circunferencia cuyos radios son iguales a lalongitud del segmento dado. Argumenta Euclides [1] que cualquiera delos dos puntos en los que se cortan las circunferencias mencionadas esel punto necesario para completar el triángulo equilátero. El problemacon la demostración de Euclides que que si el plano consiste de puntosque se pueden describir como pares de números racionales, entonces losarcos de circunferencia no se cruzan necesariamente. Bertram Russell[5, 1902] presenta una crítica cáustica (y algo injusta, en mi opinión)de las limitaciones lógicas del escrito de Euclides, aduciendo comoDate: 22 de septiembre de 2013.1

2 JORGE M. LÓPEZ FERNÁNDEZargumento este “error” en la demostración de la Proposición 1 de losElementos.Se cuenta que en la ciudad de la Magna Grecia en el Golfo deTarento (hoy sur de Italia) vivió Hipaso de Metaponto, miembro de laprimera Escuela de los Pitagóricos, quienes pensaban que los númerosracionales eran adecuados para describir las longitudes de todos losobjetos geométricos.Figura 1. Hipaso de MetapontoHipaso descubrió que la diagonal de un cuadrado es inconmensurablecon cualquiera de sus lados. Hacemos una pequeña digresión paraexplicar este lenguaje (un poco arcaico hoy día). En el diccionario dela Real Academia Española, el verbo “mensurar” significa “medir”. Doscantidades (magnitudes) son conmensurables si se puede determinaralguna magnitud común de manera que las cantidades dadas sepuedan expresar, ambas, como múltiplos de esta magnitud común.Dos cantidades son inconmensurables si no son conmensurables. Porejemplo, las fracciones 2/3y3/4son cantidades conmensurables.Sabemos que 2/3queda a dos terceras partes del trayecto del cero al unoen la recta numérica, y la fracción 3/4queda a tres cuartas partes dela misma distancia. Por consiguiente, si dividimos la unidad de la rectanumérica (el segmento de 0a1) en 12 partes iguales y construimosuna regla de medir empleando una de tales partes como la unidadentonces, la distancia del cero a la fracción 2/3en la recta numéricamediría 8unidades y la distancia del cero a 3/4, en la misma recta,mediría 9unidades. Este argumento es completamente general, es decir,funciona para cualesquiera par de fracciones, por lo cual es fácil ver que

LAS FRACCIONES Y LOS NÚMEROS RACIONALES 3cualesquiera dos fracciones son cantidades conmensurables. Supongaque dos cantidades rysson conmensurables. Entonces, respecto auna misma regla de medir, sus distancias del cero en la recta numéricamiden, respectivamente, nym, donde nymson enteros positivos. Sila unidad de nuestra regla tiene longitud ℓ1, entonces r=nℓ ys=mℓ,de manera que r/s es la fracción n/m. Así pues, dicho en un lenguajemás moderno, dos cantidades distintas de cero son conmensurables siy sólo si el cociente formado al dividir una por la otra es una fracción.Hipaso de Metaponto hizo varios descubrimientos matemáticos no-tables. Por ejemplo, él demostró cómo se puede construir un dodecae-dro regular inscrito en una esfera. Sin embargo, el descubrimiento másconocido de Hipaso fue el de la inconmensurabilidad de la diagonal deun cuadrado con cualquiera de sus lados. Este último descubrimien-to costó a Hipaso su expulsión de la famosa sociedad secreta fundadapor Pitágoras y conocida como la Hermandad Pitagórica. Por su seria“transgresión”, Hipaso fue condenado al ostracismo por los miembrosesta sociedad secreta. Se dice que Hipaso fue víctima de tal desdény repudio por parte de sus antiguos “hermanos”, que estos últimos leerigieron una tumba con su epitafio, dándolo así como muerto en vida.En vista del descubrimiento de Hipaso, la diagonal del cuadrado cuyoslados miden una unidad (el llamado “cuadrado unitario”) es un númeroirracional, es decir, no puede ser una fracción.Un pensamiento que nos viene naturalmente a la mente es el relativoa la justicia del castigo administrado a Hipaso dada la naturaleza desu “pecado” o “transgresión”. La gran ironía de todo esto es que Hipasomostró con su descubrimiento la posibilidad de la existencia de otraclase de números, números que no son fracciones, los cuales hacenposible el mundo moderno y tecnológico que conocemos hoy día. Enlas viejas películas de la conquista del oeste de los Estados Unidosvemos cómo los forajidos, luego de asaltar un banco, hacen una paradamientras se alejan del pueblo, para cortar los cables del telégrafo.La historia del teléfono celular, así como la del ya difunto telégrafo,muestra el poder matemático de la mente humana. Las llamadas desdeteléfonos celulares, la posibilidad de comunicarnos a través del correoelectrónico y las redes sociales de comunicación (como facebook ytweeter), el poder escuchar música y noticias mientras viajamos enautomóvil, es todo posible, gracias al cálculo. En efecto, el físico escocésdel siglo XIX, James Clerk Maxwell propuso las ecuaciones que hoy llevan su nombre para describir los fenómenos electromagnéticos. Laversión diferencial de estas ecuaciones suponiendo un cierto tipo desistema de medidas.

Los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1. En la escritura, la fracción la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido, y debajo, o al lado, ponían el denominador; el numerador no se ponía por ser siempre 1.

Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, famoso, entre otras cosas por la serie de Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy.

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada; así para 456, 765 escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

El sistema de numeración decimal tiene dos características:

1.ª Es **decimal**: 10 unidades de un orden forman 1 unidad del orden siguiente.
2.ª Es **posicional**: el valor de cada cifra depende de su posición en el número.

PARTE ENTERA			PARTE DECIMAL		
Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima
C	D	U	d	c	m

- Si dividimos una unidad en 10 partes iguales, cada parte se llama **décima**.

1 1,1 1,2 1,3 **1,4** **1,5** 1,6 1,7 1,8 1,9 **2** $\quad \frac{1}{10} = 0{,}1$ $\quad \boxed{1\ U = 10\ d}$

- Si dividimos una unidad en 100 partes iguales, cada parte se llama **centésima**.

1,4 1,41 1,42 1,43 1,44 1,45 **1,46** **1,47** 1,48 1,49 **1,5** $\quad \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad \boxed{1\ d = 10\ c}$

- Si dividimos una unidad en 1.000 partes iguales, cada parte se llama **milésima**

1,46 1,461 1,462 1,463 1,464 1,465 1,466 1,467 1,468 1,469 **1,47** $\quad \frac{1}{1.000} = 0{,}001$ $\quad \boxed{1\ c = 10\ m}$

1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1.000 milésimas

DIVISIÓN DECIMAL DE DOS NÚMEROS NATURALES

1.º Si la **división es exacta**, el resto es cero, $r = 0$. (Recuerda que $D = d \cdot c + r$).

2.º Si la **división no es exacta**, el resto es distinto de cero y menor que el dividendo, $r \neq 0$ y $r < d$.

En este caso, se puede seguir dividiendo, bajando un cero al resto y poniendo una coma decimal en el cociente hasta obtener una división con resto cero, o aproximar con una, dos, tres o más cifras decimales.

EJEMPLO

División exacta

```
352 |16
032  22
  0
```

División no exacta

```
125 |20            125  |20
 05  6    ──→       050  6,25
                     100
                      00
```

FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

- Para expresar una fracción como número decimal se divide el numerador entre el denominador.
- Si el **resto es cero**, el número decimal es **exacto**.

$$\frac{7}{2} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 3,5 \\ \ \ 0 & \end{array} \longrightarrow \frac{7}{2} = 7 \div 2 = 3,5 \longrightarrow \text{3,5 es un número decimal exacto.}$$

- Si el **resto no es cero**, el número decimal es **periódico** (si seguimos dividiendo siempre se repetirá un factor).

$$\frac{7}{3} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 2,33 \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array} \longrightarrow \frac{7}{3} = 7 \div 3 = 2,3333\ldots \longrightarrow \text{2,333... es un número decimal periódico.}$$

Un número decimal se puede expresar como fracción decimal.

Para ello se coloca el número sin la coma en el numerador, y en el denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

$$0,5 = \frac{5}{10} \qquad 45,78 = \frac{4.578}{100} \qquad 15,379 = \frac{15.379}{1.000}$$

Para comparar números decimales hay que seguir estos pasos.

1.º Observamos la parte entera.
- Es mayor el número que tiene mayor parte entera.
- Si las partes enteras son iguales, se compara la parte decimal.

2.º Observamos la parte decimal.
- Se comparan las décimas, luego las centésimas, milésimas…

EJEMPLO

En la clase de Educación Física realizan pruebas de lanzamiento de peso. Los mejores resultados han sido: Alberto, 2,95 m; Ana, 3,16 m, y Elena, 3,17 m. ¿Quién ha lanzado más lejos?

1.º Parte entera:

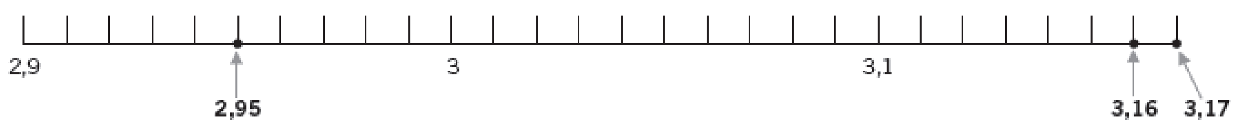
2,95 es menor que 3,18 y 3,17.	$2 < 3$
3,18 y 3,17 tienen la misma parte entera.	$3 = 3$

2.º Parte decimal:

	Décimas	**Centésimas**
3,17 es mayor que 3,16.	$1 = 1$	$7 > 6$

Por tanto: $3{,}17 > 3{,}16 > 2{,}95$.

Podemos ver el orden en la recta numérica.



Para **sumar o restar** números decimales, colocamos los números, de forma que coincidan las comas en la misma columna, y se añaden los ceros necesarios para que todos tengan el mismo número de cifras decimales. Después, se suman o se restan como si fueran números naturales, poniendo la coma en el resultado debajo de la columna de las comas.

EJEMPLOS

En una calle se encuentran estacionados 4 vehículos. Sus longitudes en m son: 3,8; 4,17; 10,23; 5,1. ¿Qué longitud de calle ocupan?

$$\begin{array}{r} 3{,}8\mathbf{0} \\ 4{,}17 \\ 10{,}23 \\ +\ \ 5{,}1\mathbf{0} \\ \hline 23{,}30 \end{array}$$

Se añaden ceros para que todos los números tengan el mismo número de decimales.

23,30 m ocupan los vehículos.

En una calle hay estacionados 2 camiones: uno mide 12,98 m y el otro 16,3 m. ¿Qué diferencia de longitud hay entre los dos vehículos?

$$\begin{array}{r} 16{,}3\mathbf{0} \\ -\ \ 12{,}98 \\ \hline 3{,}32 \end{array}$$

Se añaden ceros para que todos los números tengan el mismo número de decimales.

3,32 m hay de diferencia.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para **multiplicar** dos números decimales:

1.º Se multiplican como si fueran números naturales, sin tener en cuenta la coma.

2.º En el resultado obtenido se coloca la coma. Para ello, se cuentan desde la derecha tantos lugares como cifras decimales tengan los dos factores.

EJEMPLO

Para forrar mis libros y carpetas de este curso he necesitado 2,75 m de forro. El precio del metro de forro es de 1,30 €. ¿Cuánto me ha costado en total?

$$\begin{array}{r} 2{,}75 \\ \times \quad 1{,}3 \\ \hline 825 \\ 275 \\ \hline 3{,}575 \end{array}$$

€ me ha costado en total.

Para **multiplicar** un número decimal por 10, 100, 1.000... se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

$$78{,}562 \cdot 100 = 7856{,}2$$
$$4{,}739 \cdot 1.000 = 4.739$$

Para **multiplicar** un número decimal por un número natural seguido de ceros:

1.º Se multiplica el número decimal solo por el número natural sin los ceros.

2.º El producto obtenido se multiplica por la unidad seguida de los ceros que tenga el número natural.

$$8{,}56 \cdot 200 \left\{ \begin{array}{l} 8{,}56 \cdot 2 = 17{,}12 \\ 17{,}12 \cdot 100 = 1.712 \end{array} \right.$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Existen tres casos:

1.º **Dividendo decimal y divisor natural.** Se divide como si fuera una división normal, pero al bajar la primera cifra decimal se pone la coma en el cociente.

2.º **Dividendo natural y divisor decimal.** Se suprime la coma del divisor y se añaden tantos ceros al dividendo como cifras decimales tenga el divisor

3.º **Dividendo y divisor decimales.** Se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene el divisor. Si es necesario, se añaden ceros al dividendo.

EJEMPLO

Dividendo decimal y divisor natural

```
8,5 |5
3 5  1,7
  0
```

Dividendo natural y divisor decimal

```
441 |3,6  ⟶  4410 |36
             081   122,5
              090
               18
```

Dividendo y divisor decimales

```
1,28 |0,2  ⟶  12,8 |2
               0 8  6,4
                 0
```

ACTIVIDADES A DESARROLLAR:

1 **Escribe con cifras.**

a) Cinco décimas.

b) Una décima.

c) Once milésimas.

d) Quince centésimas.

e) Diez centésimas.

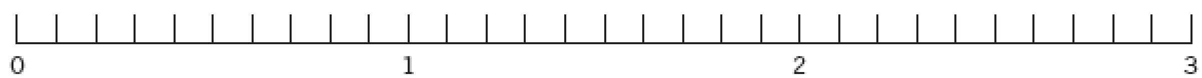
f) Ciento catorce milésimas.

2 **Completa la siguiente tabla.**

NÚMERO	PARTE ENTERA	PARTE DECIMAL	SE LEE
15,6	15	6	Quince unidades seis décimas
3,27			
	23	35	
0,9			
			Nueve unidades treinta y tres centésimas

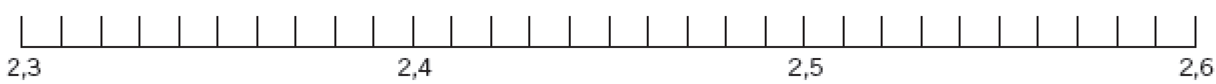
3 **Representa los números en una recta numérica.**

a) 2,5 b) 1,9 c) 0,4 d) 2,8 e) 1,3 f) 0,2



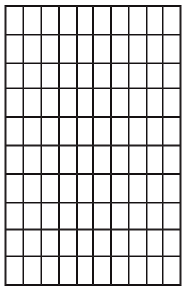
4 **Representa los siguientes números en una recta numérica.**

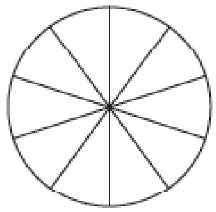
a) 2,35 b) 2,59 c) 2,55 d) 2,43 e) 2,48 f) 2,33

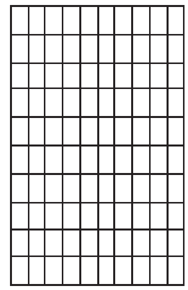


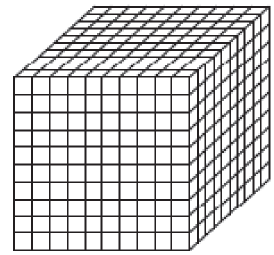
5 **Colorea en cada caso el número que se indica.**

a) 25 centésimas. b) 9 décimas. c) 49 centésimas. d) 200 milésimas.









6 **Completa las siguientes expresiones.**

a) 3 décimas = 30 centésimas.

b) 5 centésimas = ………… milésimas.

c) 15 unidades = ………… milésimas.

d) 20 unidades = ………… décimas.

e) 7 décimas = ………… milésimas.

f) 4 centésimas = ………… milésimas.

7 **¿Cuál es el valor de la cifra 7 en cada número?**

a) 37,98 b) 43,07 c) 91,75 d) 70,51 e) 52,347

8 **Realiza la descomposición de los siguientes números.**

C	D	U		d	c	m	DESCOMPOSICIÓN
4	3	0	,	5	8	1	400 + 30 + 0,5 + 0,08 + 0,001
5	0	9	,	0	3	2	
7	4	5	,	3	0	3	
			,				600 + 50 + 4 + 0,1 + 0,03 + 0,007
			,				80 + 9 + 0,4 + 0,03 + 0,005

1 Decide si las siguientes divisiones son exactas y si no lo son calcula el cociente con una cifra decimal.

a) $27 \div 2$ b) $210 \div 3$ c) $185 \div 7$

2 Calcula el cociente con dos cifras decimales.

a) $17 \div 3$ c) $101 \div 7$ e) $83 \div 13$

3 Averigua si las fracciones dan como resultado un número decimal exacto o periódico.

a) $\frac{24}{50} =$ c) $\frac{1}{3} =$ e) $\frac{9}{10} =$

b) $\frac{11}{33} =$ d) $\frac{6}{9} =$ f) $\frac{25}{50} =$

4 Expresa en forma de fracción decimal los siguientes números.

a) $36{,}78 =$ d) $2{,}801 =$ g) $21{,}8456 =$

b) $130{,}9 =$ e) $73{,}06723 =$ h) $0{,}00009 =$

c) $0{,}75 =$ f) $0{,}30675 =$ i) $0{,}0000100 =$

Para **dividir** un número decimal entre 10, 100, 1.000... se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga el divisor: 1, 2, 3... Si es necesario se añaden ceros.

$$834,7 \div 100 = 8,347$$

$$18,3 \div 1.000 = 0,0183$$