1 Concepto de función, dominio y recorrido

INTRODUCCION: Sabes que es depreciación? De qué depende la depreciación de un objeto o una máquina de producción? De que variables depende la depreciación? Lee cuidadosamente y reflexiona:

Saberes previos

La depreciación es el mecanismo mediante el cual se reconoce el desgaste que sufre un bien por el uso que se haga de este.

De acuerdo con esa definición, ¿de qué factores depende la deprecia-ción de una máquina?

Es hora de profundizar un poco más en la creación de este pensamiento matemático variacional:

Analiza

El costo anual, en millones de pesos, del mantenimiento de una máquina para fabricar botellas de plástico en función del tiempo que lleva funcionando viene dado por la relación $f(x) = x^2 - x + 1$.

- ¿Cuánto dinero se ha invertido en el mantenimiento de la máquina luego de su tercer año de uso?

Ya pudieron deducir que la depreciación depende de dos variables principales uno es el tiempo y otro es el valor o el costo. Que variable depende de la otra? Podríamos registrar lo datos por periodos de tiempo determinados? Sabes que es una tabla de datos o de valores? Lee detenidamente:

Una **tabla de valores** es una representación de datos, mediante pares ordenados que expresan la relación entre dos variables.

La **expresión analítica** de una función es una ecuación que relaciona algebraicamente las variables que intervienen.

La **gráfica de una función** es un dibujo o boceto que permite conocer intuitivamente el comportamiento de dicha función.

Ahora sí, y es horade abordar el tema con propiedad, lee, aprende, repasa y analiza.

Conoce

1.1 Concepto de función. Dominio y recorrido de una función

Para responder la pregunta de la sección Analiza, se debe sumar el costo del mantenimiento de la máquina durante cada uno de los tres primeros años.

- El costo del mantenimiento de la máquina durante el primer año fue: $f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$ (esto es 1 millón de pesos).
- En el segundo año esa inversión fue de: $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$ (es decir, 3 millones de pesos).
- En el tercer año, el mantenimiento costó: $f(3) = 3^2 - 3 + 1 = 7$ (o sea, 7 millones de pesos.).

Después del tercer año de uso, se habían invertido en el mantenimiento de la máquina: $1 + 3 + 7 = 11$ millones de pesos. Esto se puede establecer debido a que para cada año el costo de mantenimiento es único.

Una **función** ***f*** es una relación que asigna a cada elemento *x* de un conjunto *X* un único elemento *y* de un conjunto *Y*. Se llama **dominio** de *f* (que se indica como $D(f)$) al conjunto de valores que toma la variable independiente, *x*. El **recorrido** de *f* (que se nota como $R(f)$) es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, *y*, esto es el conjunto de las imágenes.

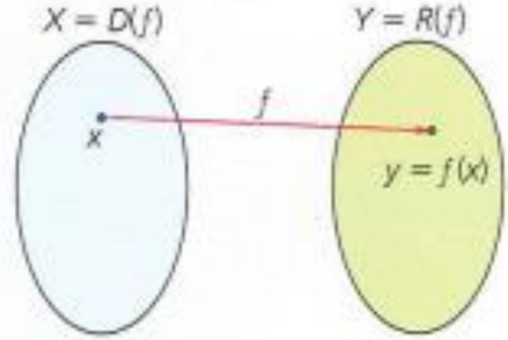


Figura 2.1

Ya estamos listos para asumir el primer ejemplo, donde le vamos dando valores a la variable independiente que es X, luego calculamos y el resultado que obtengamos es Y. Ya todos sabemos que esa función nos da como resultado una función cuadrática que al dibujarla por medio de parejas ordenadas o puntos (x, y), da una gráfica de una parábola.

Ejemplo 1

La relación $f(x) = x^2 - x + 1$ es una función que está expresada mediante su expresión analítica.

Para trazar su gráfica, puede construirse una tabla de valores.

x	$f(x)$
−3	13
−2	7
−1	3
0	1
1	1
2	3

Tabla 2.1

$$f(-3) = (-3)^2 - (-3) + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$$
$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$
$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$f(0) = 0^2 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$
$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

Nota: Recuerden que x^2, nos indica que en número que reemplacemos lo multiplicamos por el mismo y que siempre me da positivo ya que en esa multiplicación debo tener en cuenta los signos.

Al representar las parejas ordenadas $(-3, 13)$, $(-2, 7)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 3)$ y unirlas mediante un trazo, se obtiene la representación gráfica de la función $f(x)$. (Figura 2.2).

A partir de la gráfica de la función f es posible determinar su dominio y recorrido.

Puesto que x puede tomar cualquier valor real $D(f) = \mathbb{R}$.

De otro lado, se observa que la función toma valores para $y \geqslant \frac{1}{2}$, así que

$R(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} / y \geqslant \frac{1}{2} \right\}$ que puede indicarse mediante el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$

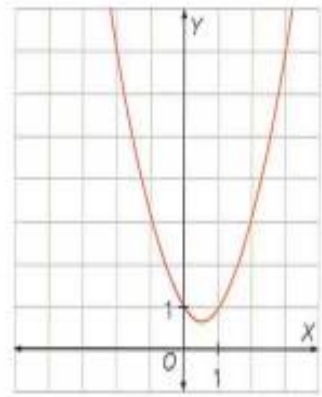


Figura 2.2

El plano cartesiano tiene dos ejes el X y el Y. si observamos con detenimiento la gráfica nos daremos cuenta que si trazáramos líneas verticales por todo el eje X, siempre cortaríamos la gráfica lo que nos indica que estamos teniendo en cuenta a todos los números reales, que no hay ninguno que no se pueda reemplazar en la función, porque todos nos darían una imagen o un numero en Y.

En cambio si trazáramos líneas horizontales nos daríamos cuenta que no siempre corta a la gráfica que si hacemos una lectura vertical de la gráfica nos daríamos cuenta de que ella comienza entre cero y uno y va hasta infinito porque es creciente o sea que siempre va subiendo.

Nota: Querido estudiante recuerda que la práctica hace al maestro por eso es importante que grafiques diferentes funciones y vayas reconociendo la forma de cada función y sus características. Usa la herramienta de Geogebra, que te ayuda a descubrir si el trabajo que has hecho es correcto o debe se replanteado.

A continuación veras la forma de algunas funciones según el exponente:

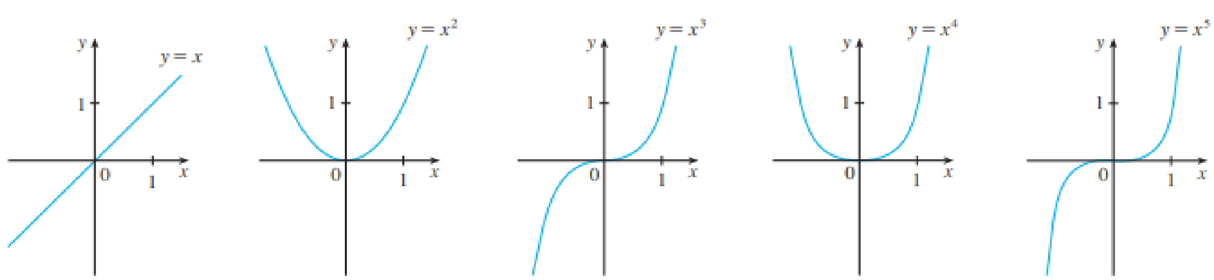
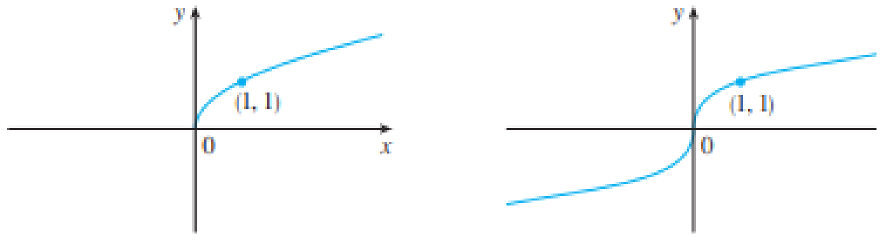


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Esto es cuando el exponente es un número entero.



a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Estos son ejemplos cuando el exponente es una fracción como los vistos en clase.

Ya que nos aprendimos las formas repacemos cómo hacer para que una función se mueva hacia la derecha o izquierda, que suba o que baje.

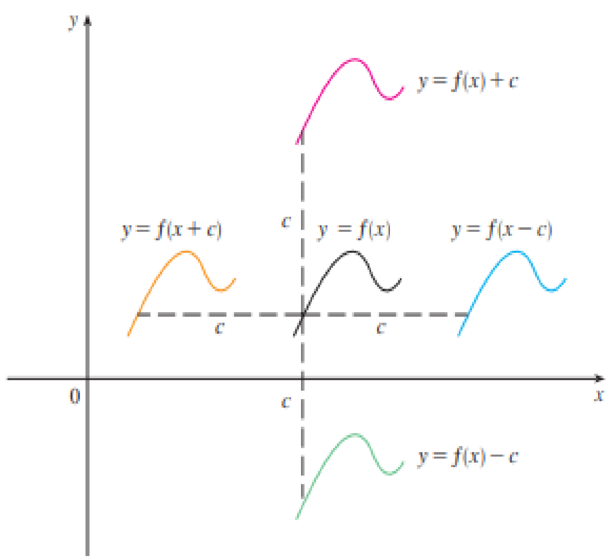
Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

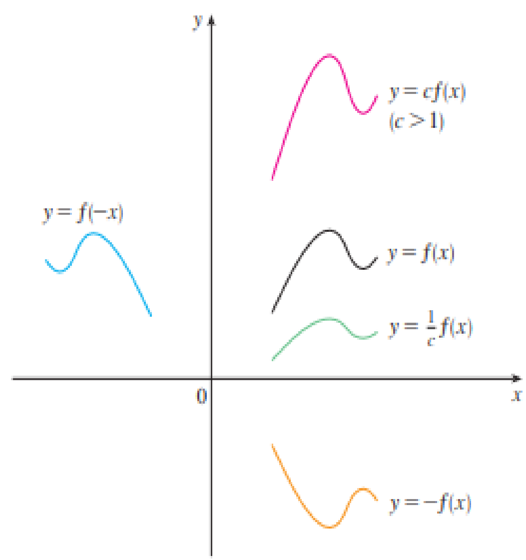
$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$



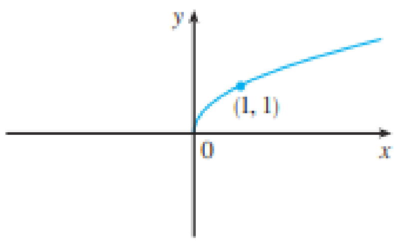


Lee la teoría, analiza las imágenes y recuerda lo visto en clase y veras lo fácil que es.

EJERCICIO EXPLICATIVO. DONDE SE APLIQUEN LOS CONCEPTOS VISTO EN CLASE.

Graficar, analizar, subir la función, luego bajarla, luego correrla a la derecha y luego a la izquierda.

Graficar la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$, todos sabemos que nos debe dar así, ya sabemos que esta es la forma que nos debe dar



a) $f(x) = \sqrt{x}$

Remplacemos algunos valores haber que nos da:

Cuando x= -1 f (-1) = nos da indeterminado.

(Todos sabemos que los números negativos no se pueden calcular cuando están dentro de una raíz, porque no existen en los números reales, lo que nos lleva a deducir que debemos empezar a calcular desde cero a infinito)

- Cuando x= 0 f (0) = $\sqrt{0}$. = 0

Obteniendo el punto descrito por la pareja ordenada (x, y)= (0, 0)

- Cuando x= 1 f (1) = $\sqrt{1}$. = 1

Obteniendo el punto descrito por la pareja ordenada (x, y)= (1, 1)

Para que nos de números enteros solo calculamos cuadrados perfectos por ejemplo 2x2= 4.

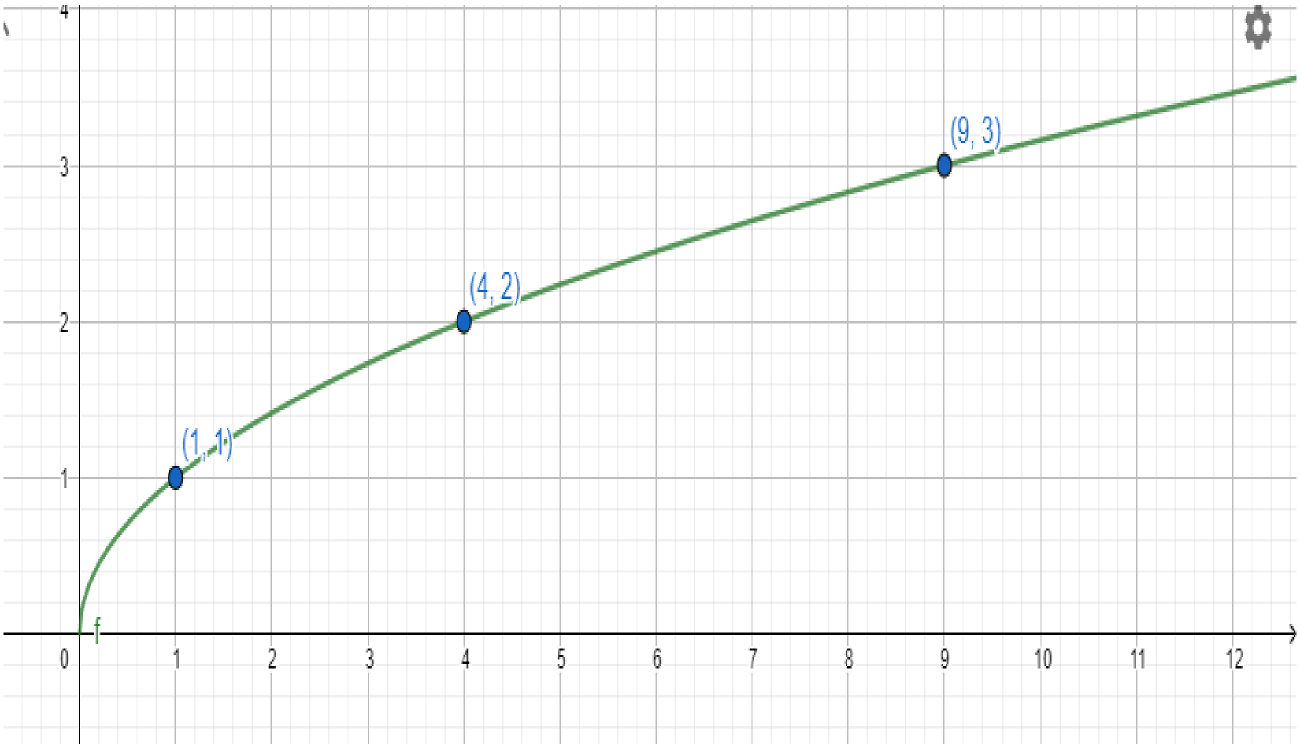
- Cuando x= 4 f (1) = $\sqrt{4}$. = 2

Obteniendo el punto descrito por la pareja ordenada (x, y)= (4, 2)

- Cuando x= 9 f (9) = $\sqrt{9}$. = 3

Obteniendo el punto descrito por la pareja ordenada (x, y)= (9, 3) y así sucesivamente…

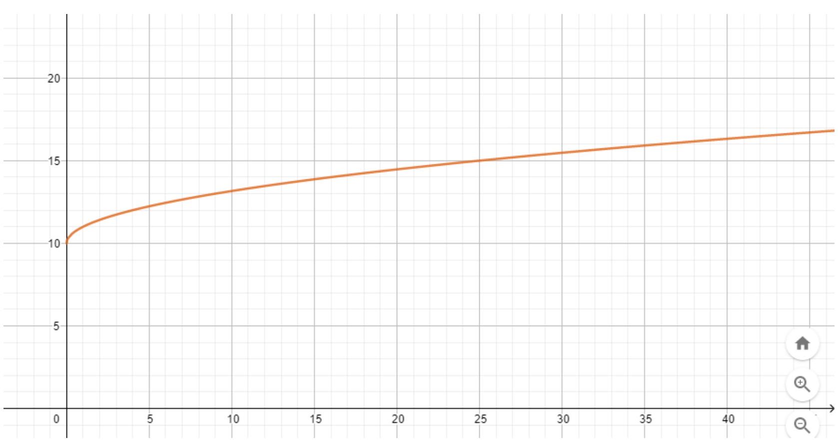
Graficamos esos puntos:



Esa es la forma esperada. Si analizamos el dominio que está relacionado con el eje X, podemos afirmar que la gráfica comienza en el eje X en cero, porque no existe grafica en la parte negativa de este eje, y se extiende hasta infinito (recorrido horizontal para el análisis). Y el rango también comienza en cero hasta infinito pero este análisis se realiza en el eje Y.(recorrido vertical).

1. Ahora se mostrara como se hace para que la función suba que es sumándole un número real a la función y este la desplaza verticalmente. Probemos sumándole 10.

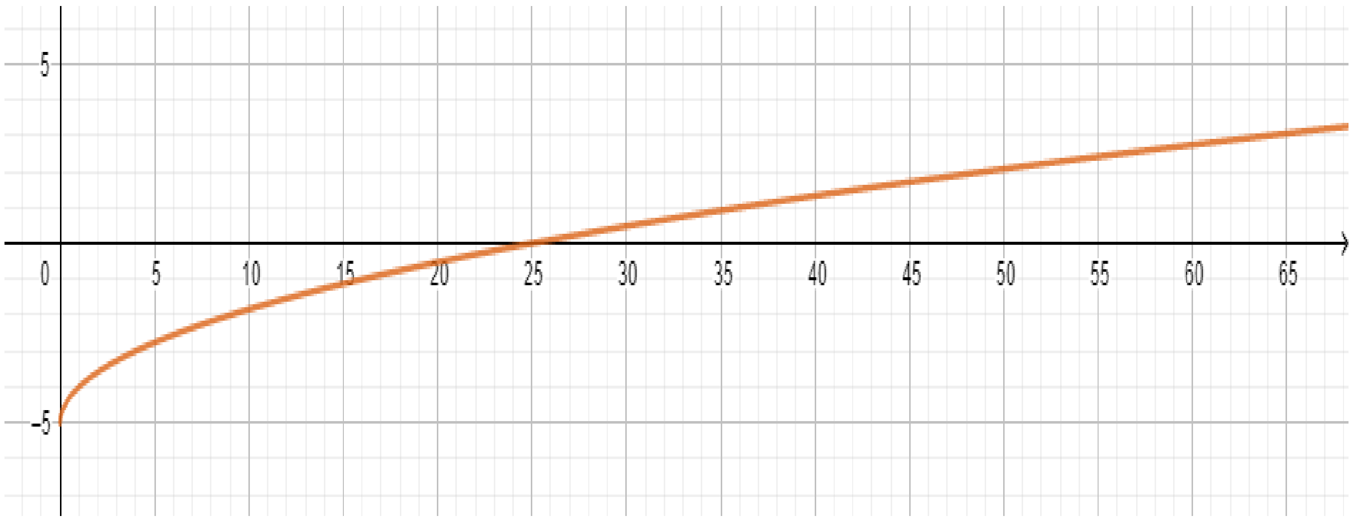
Así: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} + 10}$ (Observamos que el 10 está fuera de la raíz).



Observemos que conserva la forma pero desplaza la función 10 unidades hacia arriba.

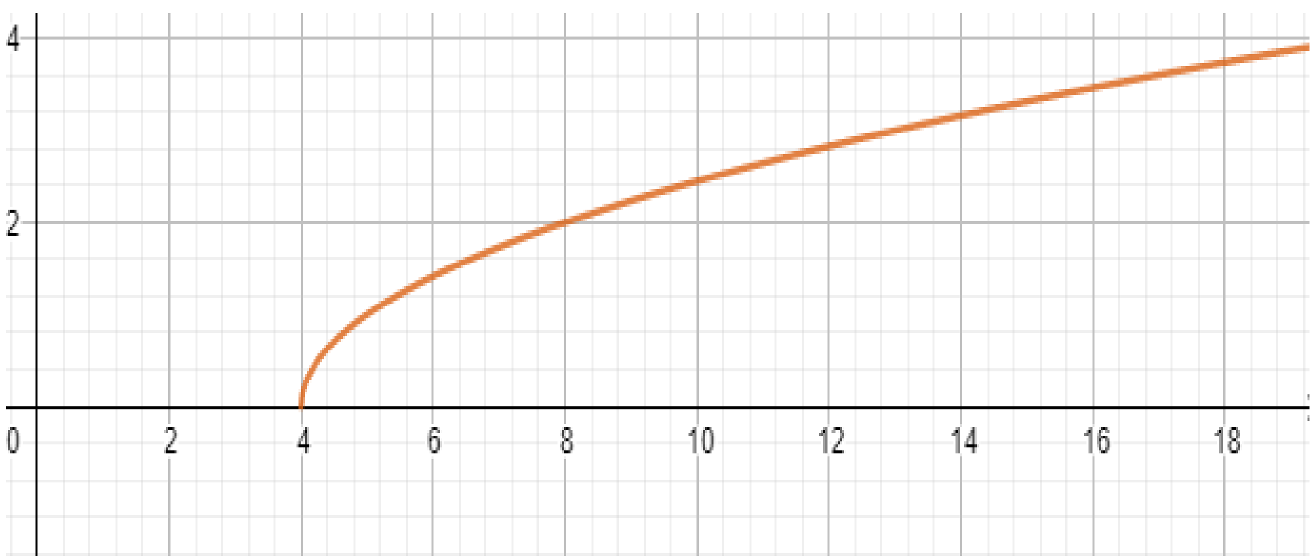
2. Ahora se mostrara como se hace para que la función baje, que es restándole un número real a la función y este la desplaza verticalmente hacia abajo. Probemos restándole 5.

Así: $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}-5}$ (Observamos que el 5 está fuera de la raíz).

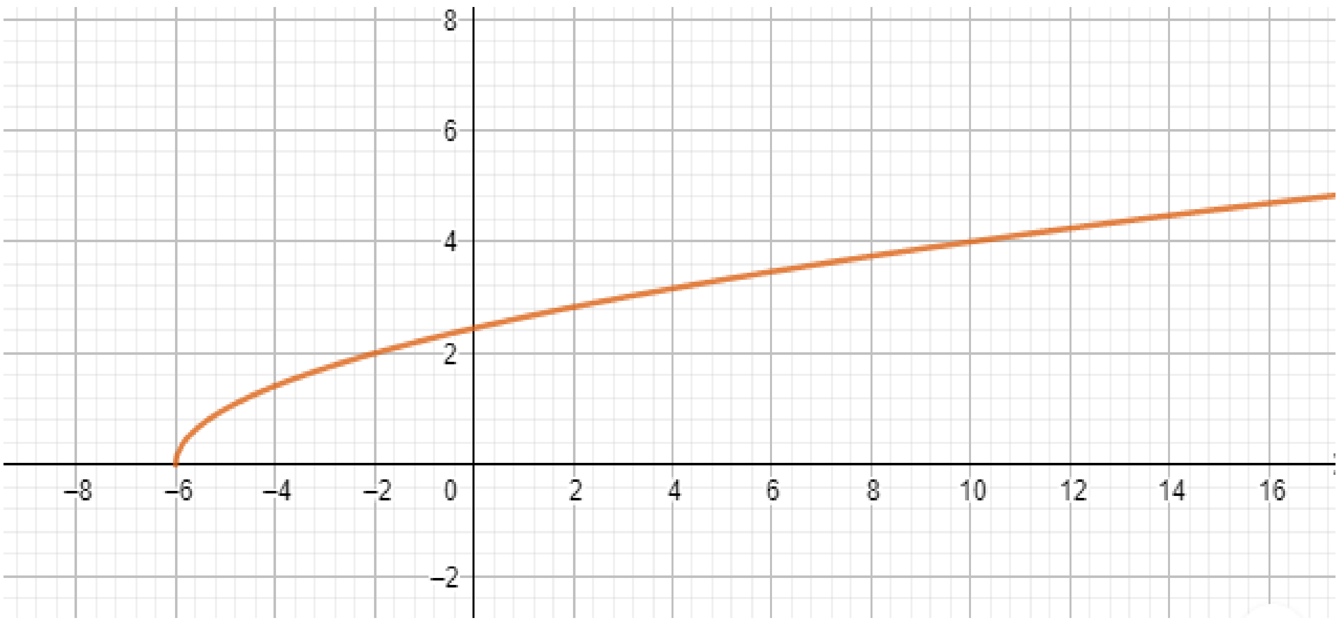


Nota: observamos que al sumarle o restarle a la función se desplaza verticalmente afectando el rango de la función pero no el dominio.

3. Ahora se mostrara como se hace para que la función se mueva a la derecha, que es restándole un número real a la variable y esto hace que se desplace horizontalmente para la derecha, en el caso de esta función afectando el dominio.
   Así: $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{(x-4)}}$ (Observamos que el 4 está dentro de la raíz).



4. Ahora se mostrara como se hace para que la función se mueva a la izquierda, que es sumándole un número real a la variable, y esto hace que se desplace horizontalmente para la izquierda, en el caso de esta función afectando el dominio. Así: $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{(\boldsymbol{x+6})}$ (Observamos que el 6 está dentro de la raíz).



TALLER DE EJERCITACION.

Grafica las siguientes funciones a mano, verifícalas en Geogebra y determina el Dominio y en rango explicado con tus palabras los resultados.

1. Analice las siguientes funciones, determine su dominio, rango, discontinuidades, asíntotas (Apóyese con geogebra).

   a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$

   b. $g(x) = \dfrac{5x + 3}{4}$

   c. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5}$

   d. $j(x) = \dfrac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$

   e. $k(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 - 1}$

2. Analice las siguientes funciones, determine su dominio, rango, discontinuidades, asíntotas (Apóyese con geogebra).

a. $g(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - x + 5}{x^2 - 4x + 4}$

b. $h(x) = \dfrac{3x + 4}{3x - 4}$

c. $j(x) = \dfrac{x - 3}{x^3 - 27}$

d. $k(x) = \dfrac{x^2 - 25}{2x^2 - 50}$

e. $f(x) = \dfrac{-6x^2}{x^2 + 1}$

f. $g(x) = \dfrac{x^5}{x^4 + 1}$

g. $h(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$

h. $k(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - 2x - 2}$

i. $f(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 - 14x + 49}$

j. $g(x) = \dfrac{2x - 3}{2x^2 + 7x - 15}$

k. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x^4 - 1000x}$

l. $j(x) = \dfrac{2}{(x - 3)(x + 4)x}$

m. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

3. Partiendo de las gráficas realiza los mismos análisis.

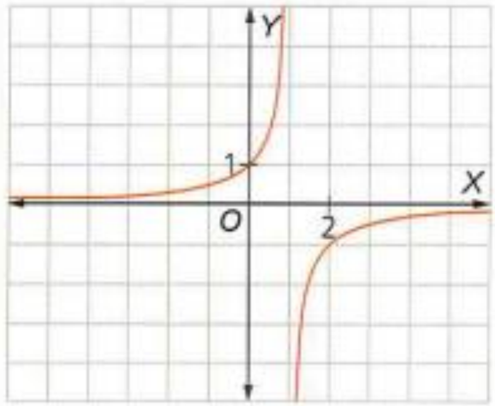


Figura 2.29

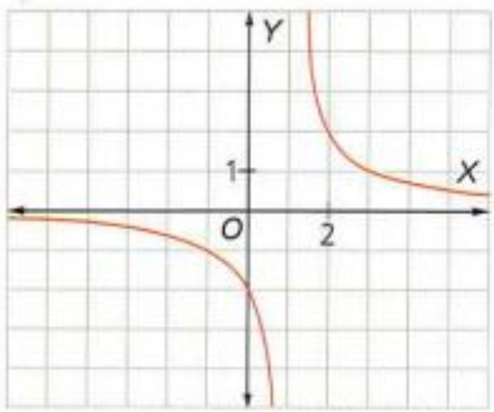


Figura 2.30