



NOMBRE DEL DOCENTE: ELVIA LUCIA URREGO CANO

ÁREA O ASIGNATURA: MATEMATICAS GRADO 10

TEMA(S): REPASO FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

FECHA DE ENTREGA JULIO 6

INDICADOR(ES) A DESARROLLAR:

Identifica las funciones trigonométricas en un triángulo y sus aplicaciones

1. DESARROLLO TEÓRICO DE LA TEMÁTICA CON SUS RESPECTIVOS EJEMPLOS

Lea y estudie la teoría, no es necesario que la pase al cuaderno

Funciones seno y coseno

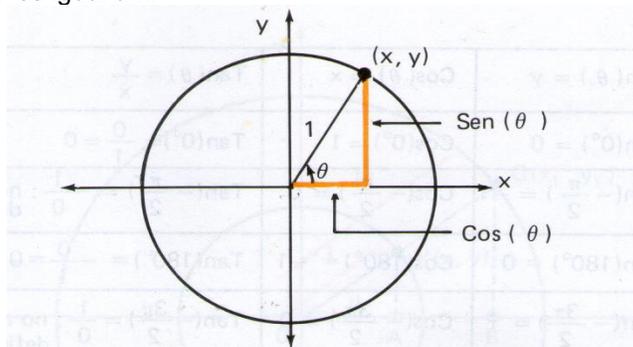
Definamos dos nuevas funciones de la siguiente manera:

$F_1(\theta) = Y$: F_1 asocia θ con y

$F_2(\theta) = X$: F_2 asocia θ con x

La función F_1 asocia a cada ángulo θ con la y del punto trigonométrico y se denomina SENO, se representa como $\text{Sen}(\theta) = y$, se lee el seno de θ es igual a y .

La función F_2 asocia a cada ángulo θ con la x del punto trigonométrico y se denomina COSENO, se representa como $\text{Cos}(\theta) = x$, se lee el coseno de θ es igual a x .



Funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno se llaman comúnmente funciones trigonométricas. Además de estas funciones existe otra función trigonométrica fundamental: la función Tangente hace corresponder a cada ángulo θ con el cociente $\frac{y}{x}$ de las coordenadas del punto trigonométrico correspondiente al ángulo θ es decir :

$\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}$ con $x \neq 0$ y se lee tangente de θ es igual a y sobre x con x diferente de cero.

La siguiente tabla muestra los valores de las tres funciones trigonométricas para algunos ángulos.

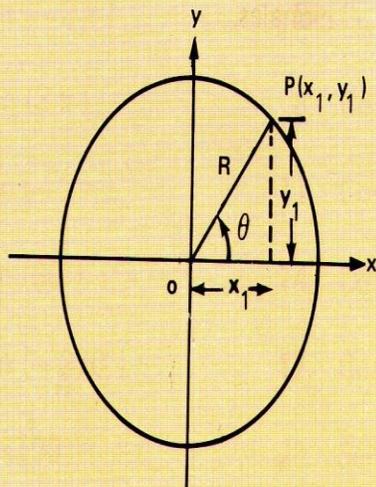


$\text{Sen}(\theta) = y$	$\text{Cos}(\theta) = x$	$\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}$
$\text{Sen}(0^\circ) = 0$	$\text{Cos}(0^\circ) = 1$	$\text{Tan}(0^\circ) = \frac{0}{1} = 0$
$\text{Sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\text{Tan}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{0}$: no está definida
$\text{Sen}(180^\circ) = 0$	$\text{Cos}(180^\circ) = -1$	$\text{Tan}(180^\circ) = -\frac{0}{1} = 0$
$\text{Sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$	$\text{Cos}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$\text{Tan}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{0}$: no está definida.

Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para circunferencias no unitarias

La definición de las funciones trigonométricas para circunferencias de radio R son equivalentes a las ya dadas como podremos ver en el siguiente cuadro.

Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto de una circunferencia no unitaria, $x^2 + y^2 = R^2$, ubicado en el extremo del lado final de un ángulo θ , entonces las funciones trigonométricas de θ se definen así:



$$\text{Sen}(\theta) = \frac{y_1}{R} = \frac{\text{la "y" del punto}}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{x_1}{R} = \frac{\text{la "x" del punto}}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

$$\text{Tan}(\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\text{la "y" del punto}}{\text{la "x" del punto}}$$

Ejemplos

1. Una circunferencia con centro en el origen pasa por el punto $(3, -4)$. Encuentre el valor de las tres funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final contiene a dicho punto.

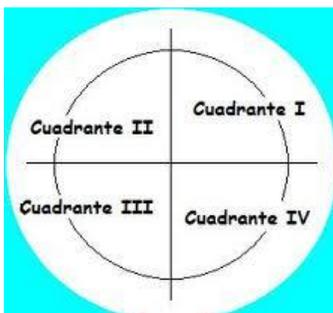
Solución: sabemos que $x=3$ y $Y=-4$, veamos quien es R .

Sabemos que $x^2+y^2 = R^2$ entonces $3^2+(-4)^2 = R^2$ es decir $9+16=R^2$, $25=R^2$ luego $R = 5$

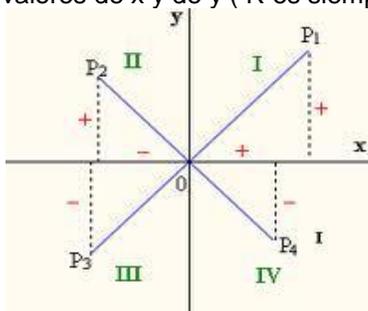
$$\text{Sen}(\theta) = \frac{y}{R} = \frac{-4}{5}; \quad \text{Cos}(\theta) = \frac{x}{R} = \frac{3}{5} \quad \text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}$$

Signo de las funciones trigonométricas

El plano cartesiano está dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes que se ordenan en sentido anti horario.



Las funciones trigonométricas cambian de signo según el cuadrante en el cual se les considere, porque dependen de los valores de x y de y (R es siempre positivo)



La siguiente tabla resume el signo de las funciones trigonométricas vistas

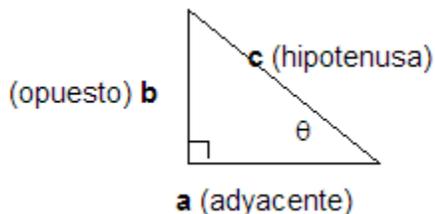
Cuadrante funcion	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

Una forma nemotécnica de recordarlo es la siguiente:



Las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Las funciones trigonométricas están relacionadas con los ángulos de un triángulo rectángulo cualquiera de la siguiente manera:



$$\text{sen } \theta = \frac{\text{opuest}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

	0°	30°	45°	60°	90°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen } \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cos } \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tan } \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind

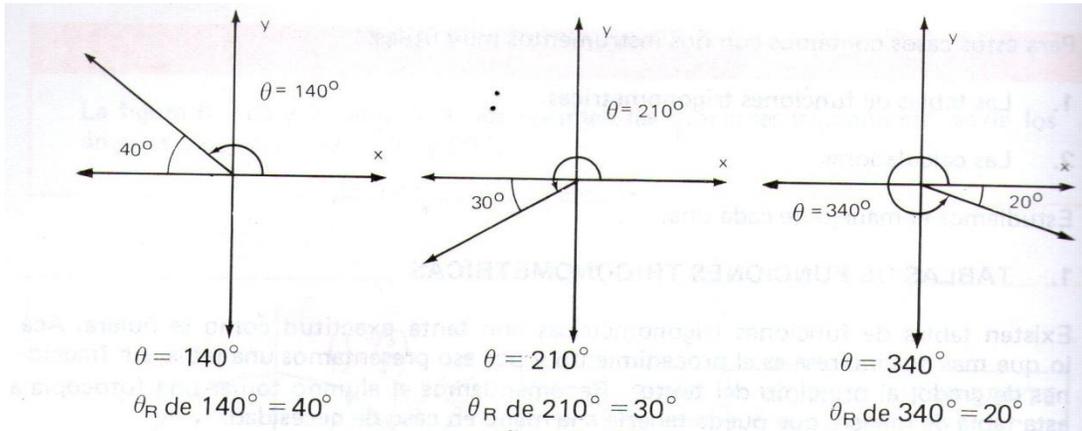
Angulo de referencia.

Para todo angulo θ en posición normal , el ángulo de referencia θ_R , denotado por θ_R es el angulo positivo menor que 90° , formado por el lado final de θ y el eje x.

Una vez conocidos los valores para los ángulos del primer cuadrante (angulos de referencia) podemos conocer de las funciones en los otros cuadrantes dado que el valor es el mismo pero el signo puede cambiar .

CUADRANTE	ANGULO DADO	ANGULO DE REFERENCIA
I	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$\theta_R = \theta$
II	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$\theta_R = 180^\circ - \theta$
III	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$\theta_R = \theta - 180^\circ$
IV	$270^\circ < \theta < 360^\circ$	$\theta_R = 360^\circ - \theta$

Ejemplo



Ejemplo 2

Hallar las funciones trigonométricas de 225°

Como 225° está en el tercer cuadrante entonces $\theta_R = \theta - 180^\circ$ luego $\theta_R = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

Entonces:

$$\text{Sen}(225^\circ) = -\text{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos}(225^\circ) = -\text{cos}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan}(225^\circ) = \text{tan}(45^\circ) = 1$$

Definición Las seis funciones trigonométricas:

Existen seis funciones trigonométricas de las cuales hemos estudiado Seno, Coseno y Tangente. Las otras tres son cotangente (cot), secante (sec) y cosecante Csc) las cuales se definen como los inversos multiplicativos o recíprocos del Seno, coseno y tangente respectivamente.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \quad \text{Cot } \alpha = \frac{1}{\text{tan } \alpha}$$

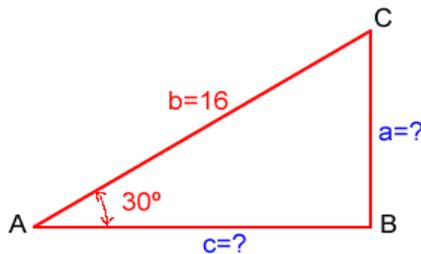
Es decir:

$$\text{cot } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}, \quad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}, \quad \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Problemas de aplicación

Ejemplos

En la figura, el ángulo $A = 30^\circ$ y $b = 16$, determine la longitud de los demás lados del triángulo.



Los elementos solicitados son el lado opuesto a, el lado adyacente c al ángulo A (30°), y el lado conocido es el valor de la hipotenusa b.



Ahora, para encontrar la solución, tenemos que utilizar las funciones trigonométricas que nos relacione los datos conocidos y buscados:

Para obtener el valor de a, utilizamos la función:

$$\text{Sen } A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Sen } 30^\circ = a / b$$

$$a = b * \text{Sen } 30^\circ$$

$$a = 0.5 * 16$$

$$a = 8$$

Para obtener el valor de c, utilizamos la función:

$$\text{Cos } A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = c / b$$

$$c = b * \text{Cos } 30^\circ$$

$$c = 16 * 0.8660254$$

$$c = 13.856$$

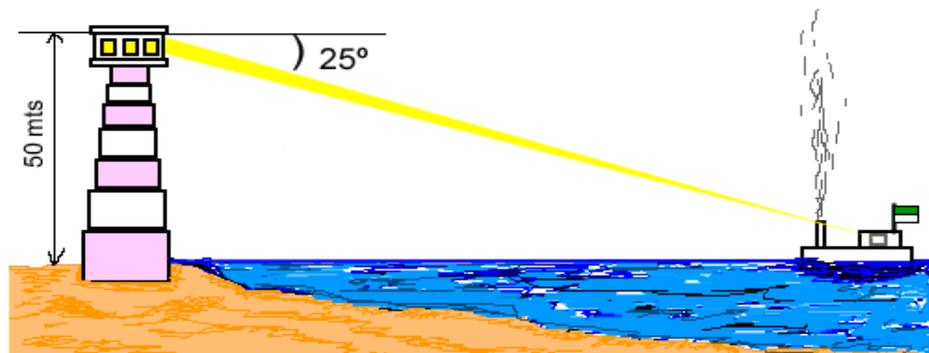
Para obtener el valor del ángulo C, aplicamos el teorema que dice que la suma interna de los ángulos de un triángulo es igual a 180° .

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + C = 180^\circ$$

por lo tanto, el valor del ángulo C = 60° .

2. En la torre de un faro que está a una altura del piso de 50 metros, el vigilante advierte que se aproxima un barco formando un ángulo de depresión de 25° . ¿Cuál es la distancia que separa el barco del faro?



Una forma de solucionarlo es:	Otra solución es:
$\text{Tan } 65^\circ = d / 50$	$\text{Tan } 25^\circ = 50 / d$
$d = 50 * \text{Tan } 65^\circ$	$d = 50 / \text{Tan } 25^\circ$
$d = 107.22 \text{ mts}$	$d = 107.22 \text{ mts}$

LEY DE LOS SENOS

En cualquier triángulo ABC, la relación entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante; esto es:

$$\frac{a}{\text{Sen } \alpha} = \frac{b}{\text{Sen } \beta} = \frac{c}{\text{Sen } \varphi}$$

EJEMPLOS:

1.- Resuelve el triángulo oblicuángulo sabiendo que $c = 23 \text{ cm}$, y los ángulos α y φ miden respectivamente 20° y 15° :

$$\frac{a}{\text{Sen } \alpha} = \frac{c}{\text{Sen } \varphi} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \text{Sen } \alpha}{\text{Sen } \varphi} \Rightarrow a = \frac{23 \cdot \text{Sen } 20^\circ}{\text{Sen } 15^\circ} = \frac{23 \cdot 0,342020}{0,258819} = \frac{2,86646}{0,258819}$$

$$a = 30,39 \text{ cm}$$

$$\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - \varphi = 180^\circ - (\alpha - \varphi) = 180^\circ - (20^\circ - 15^\circ) = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\frac{b}{\text{Sen } \beta} = \frac{a}{\text{Sen } \alpha} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{Sen } \beta}{\text{Sen } \alpha} \Rightarrow b = \frac{23 \cdot \text{Sen } 145^\circ}{\text{Sen } 20^\circ} = \frac{23 \cdot 0,573576}{0,342020} = \frac{13,192248}{0,342020}$$

$$b = 38,57 \text{ cm}$$



LEY DE LOS COSENOS

En todo triángulo oblicuángulo ABC, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

EJEMPLO

Resuelve el triángulo oblicuángulo, sabiendo que:

$$a = 13 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm y } c = 15 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{4^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 4 \cdot 15} = \frac{16 + 225 - 169}{120} = \frac{72}{120} = 0,6 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{13^2 + 15^2 - 4^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{169 + 225 - 16}{390} = \frac{378}{390} = 0,969231 \Rightarrow \beta = 14^\circ 15'$$

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{13^2 + 4^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 4} = \frac{169 + 16 - 225}{104} = -\frac{40}{104}$$

$$\cos \varphi = -0,384615 \Rightarrow \varphi = 112^\circ 37' 12''$$

2. ENLACES Y/O TEXTOS PARA PROFUNDIZAR LA TEMÁTICA

Su cuaderno del año anterior será de gran utilidad. Cualquier libro de decimo también les puede servir

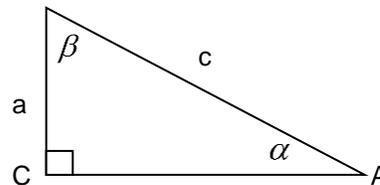
<https://www.youtube.com/watch?v=swMkyzvn-Bw>
<https://www.youtube.com/watch?v=Dbd5OmbOE9c>
<https://www.youtube.com/watch?v=SbFetGnLdr8>



3. EJERCICIOS DE REPASO

1. Si $\cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, encuentra las otras funciones. (seno, coseno, tangente,)
2. Si $\tan \alpha = \frac{5}{9}$, encuentra las otras funciones. (seno, coseno, tangente,)
3. Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usa calculadora. Recuerde que los ángulos internos de un triángulo suman 180°

- a) $\alpha = 24^\circ$ y $c = 16$.
- b) $a = 32$ y $b = 25$
- c) $\alpha = 24^\circ$ y $a = 16$



4. Resuelva usando ley del seno y del coseno según el caso (halle el valor de todos los lados y todos los angulos)

1.- $a = 125$ cm
 $\alpha = 54^\circ 40'$
 $\beta = 65^\circ 10'$

2.- $c = 25$ cm
 $\alpha = 35^\circ$
 $\beta = 68^\circ$

3.- $b = 275$ cm
 $\alpha = 125^\circ 40'$
 $\varphi = 48^\circ 50'$

4.- $b = 215$ cm
 $c = 150$ cm
 $\beta = 42^\circ 40'$

5.- $a = 512$ cm
 $b = 426$ cm
 $\alpha = 48^\circ 50'$

6.- $b = 50,4$ cm
 $c = 33,3$ cm
 $\beta = 118^\circ 30'$