NOMBRE DEL DOCENTE: ELVIA LUCIA URREGO CANO

ÁREA O ASIGNATURA: MATEMATICAS GRADO 10

TEMA(S): FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

FECHA DE ENTREGA JULIO 6

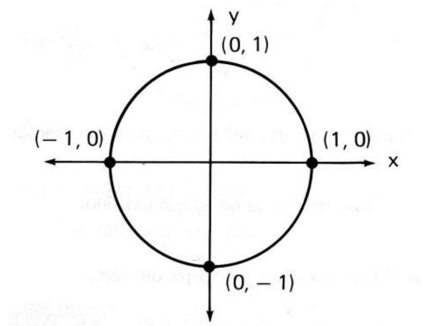
INDICADOR(ES) A DESARROLLAR:

Identifica las funciones trigonométricas en un triángulo y sus aplicaciones

1. DESARROLLO TEÓRICO DE LA TEMÁTICA CON SUS RESPECTIVOS EJEMPLOS

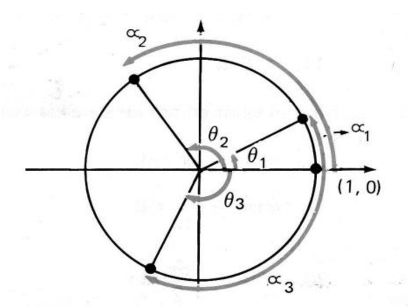
Lea y estudie la teoría, no es necesario que la pase al cuaderno ***también puede estudiarla en el texto guía*** **Páginas 76 a 83**

Función circular
La base para construir esta función como su nombre lo indica es una circunferencia de centro en (0,0) y radio igual a 1.



Para definir esta función debemos definir su dominio, su rango y la regla que lo define.

a. El dominio : está formado por todos los ángulos centrales en posición normal de la circunferencia unitaria o por los arcos de la misma circunferencia que parten del punto (1,0)

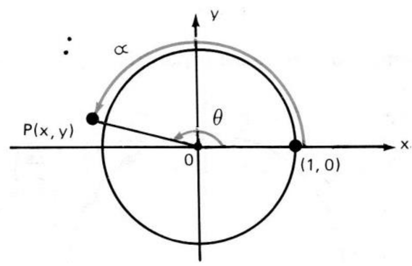


b. El rango : está formado por todos los puntos de la circunferencia unitaria ; es decir por todas aquellas parejas ordenadas (x,y) que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=1$

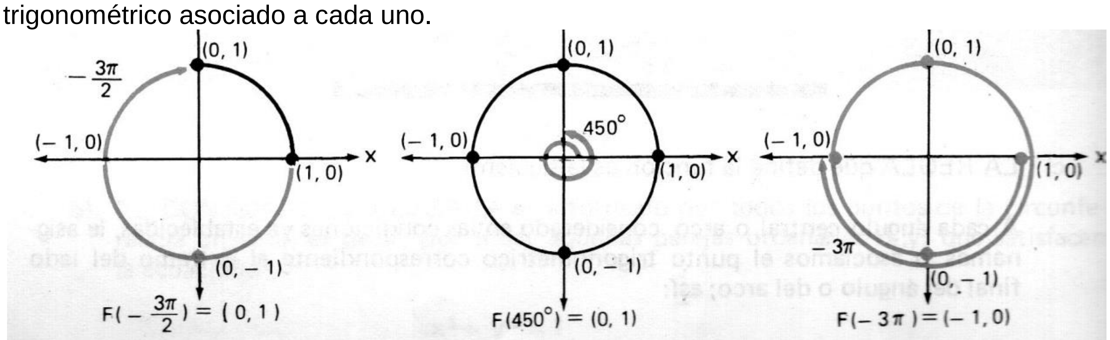
En adelante todos los puntos que pertenecen a la circunferencia $x^2+y^2=1$ se llamaran puntos trigonométricos.

c. La regla que define la función es la siguiente: a cada ángulo central o arco, considerado en las condiciones ya establecidas, le asignamos el punto trigonométrico correspondiente al extremo del lado final del ángulo o del arco.

Esta correspondencia es una función ya que a cada ángulo central le corresponde uno y solo un punto trigonométrico; es decir:
F(θ) = (x,y) , la función circular asocia θ con (x,y).

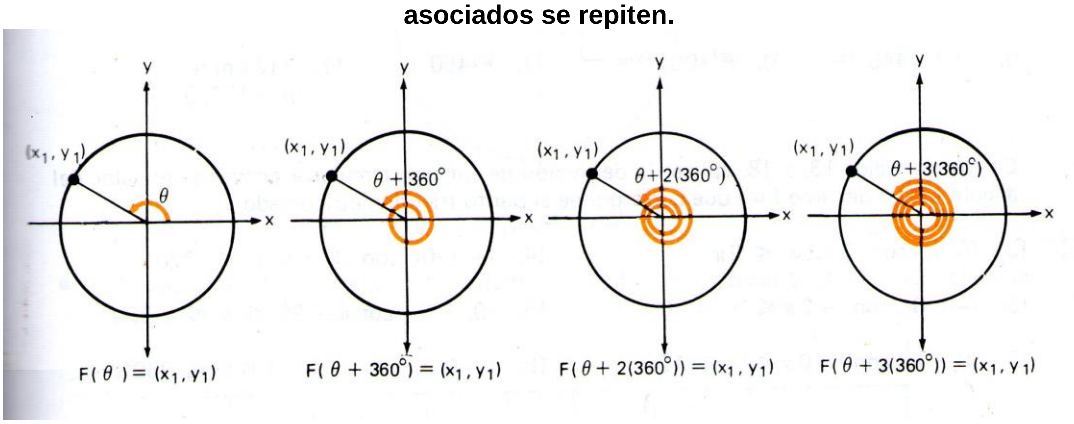


Ejemplo:
Calculemos el valor de la función circular para los siguientes ángulos y arcos
a. $\propto = \frac{-3\pi}{2}$ radianes b. θ= 450º c. $\propto$ = -3π
Solución:
Dibujemos para cada caso la circunferencia unitaria, el ángulo o el arco correspondiente y determinemos el punto trigonométrico asociado a cada uno.



Nota :

Si el ángulo es mayor que 360, entonces seguimos dando vueltas hasta completar el ángulo deseado. Esto significa que podemos definir la función circular para ángulos mayores que 360; sin embargo cuando esto ocurre los puntos trigonométricos asociados se repiten.



Funciones seno y coseno

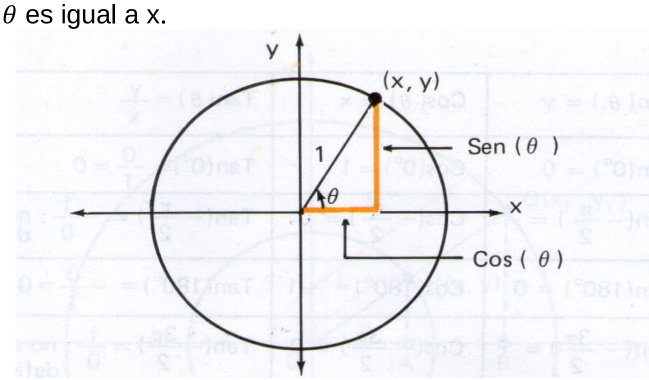
Definamos dos nuevas funciones de la siguiente manera:

$F_1(\theta)=Y$: F_1 asocia θ con y

$F_2(\theta)=X$: F_2 asocia θ con x

La función F_1 asocia a cada ángulo θ con la y del punto trigonométrico y se denomino SENO, se representa como Sen(θ) = y , se lee el seno de θ es igual a y.

La función F_2 asocia a cada ángulo θ con la x del punto trigonométrico y se denomino COSENO, se representa como Cos(θ) = x , se lee el coseno de θ es igual a x.



Funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno se llaman comúnmente funciones trigonométricas. Además de estas funciones existe otra función trigonométrica fundamental: la función <u>Tangente</u> hace corresponder a cada ángulo θ con el cociente $\frac{y}{x}$ de las coordenadas del punto trigonométrico correspondiente al ángulo θ es decir :

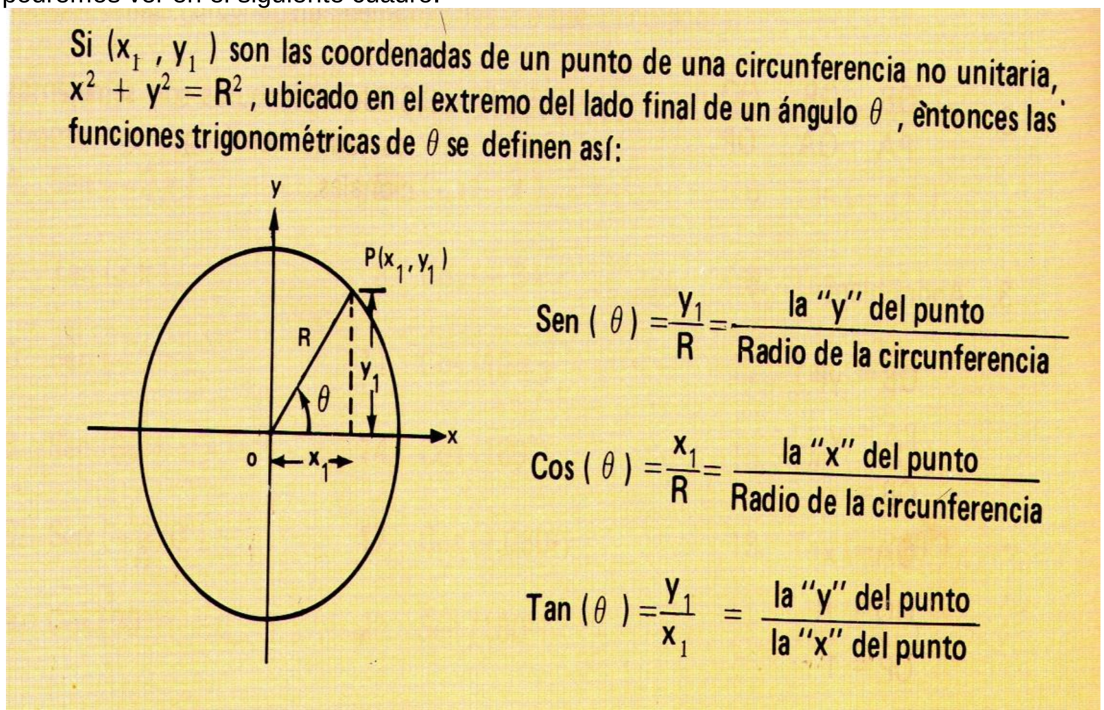
Tan (θ) = $\frac{y}{x}$ con $x \neq 0$ y se lee tangente de θ es igual a y sobre x con x diferente de cero.

La siguiente tabla muestra los valores de las tres funciones trigonométricas para algunos ángulos.

$\text{Sen}(\theta) = y$	$\text{Cos}(\theta) = x$	$\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}$
$\text{Sen}(0°) = 0$	$\text{Cos}(0°) = 1$	$\text{Tan}(0°) = \frac{0}{1} = 0$
$\text{Sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$	$\text{Cos}(-\frac{\pi}{2}) = 0$	$\text{Tan}(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{0}$: no está definida
$\text{Sen}(180°) = 0$	$\text{Cos}(180°) = -1$	$\text{Tan}(180°) = -\frac{0}{1} = 0$
$\text{Sen}(-\frac{3\pi}{2}) = 1$	$\text{Cos}(-\frac{3\pi}{2}) = 0$	$\text{Tan}(-\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{0}$: no está definida.

Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para circunferencias no unitarias

La definición de las funciones trigonométricas para circunferencias de radio R son equivalentes a las ya dadas como podremos ver en el siguiente cuadro.



Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto de una circunferencia no unitaria, $x^2 + y^2 = R^2$, ubicado en el extremo del lado final de un ángulo θ, entonces las funciones trigonométricas de θ se definen así:

$$\text{Sen}(\theta) = \frac{y_1}{R} = \frac{\text{la ``y'' del punto}}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{x_1}{R} = \frac{\text{la ``x'' del punto}}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

$$\text{Tan}(\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\text{la ``y'' del punto}}{\text{la ``x'' del punto}}$$

Ejemplos

1. Una circunferencia con centro en el origen pasa por el punto (3, - 4).Encuentre el valor de las tres funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final contiene a dicho punto.

Solución: sabemos que x= 3 y Y= -4 , veamos quien es R .

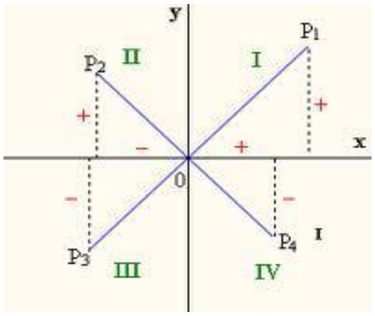
Sabemos que $x^2+y^2 = R^2$ entonces $3^2+(-4)^2 = R^2$ es decir $9+16= R^2$, $25= R^2$ luego R = 5

Sen $(\theta) = \frac{y}{R} = \frac{-4}{5}$; Cos $(\theta) = \frac{x}{R} = \frac{3}{5}$ Tan $(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}$

Signo de las funciones trigonométricas

El plano cartesiano está dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes que se ordenan en sentido anti horario.

Las funciones trigonométricas cambian de signo según el cuadrante en el cual se les considere, porque dependen de los valores de x y de y (R es siempre positivo)



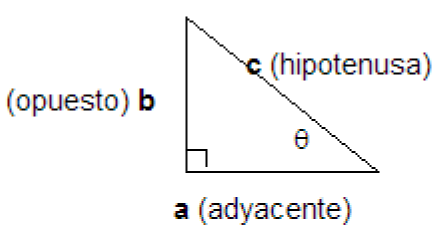
La siguiente tabla resume el signo de las funciones trigonométricas vistas

Cuadrante funcion	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

Una forma nemotécnica de recordarlo es la siguiente:

<u>Las funciones trigonométricas en el triangulo rectángulo</u>

Las funciones trigonométricas están relacionadas con los ángulos de un triangulo rectángulo cualquiera de la siguiente manera:



$$sen\ \theta = \frac{opuest}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

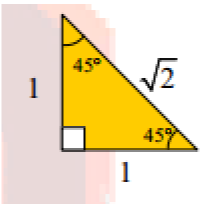
$$\cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{b}{a}$$

Para facilitar la obtención de las funciones trigonométricas recordemos las propiedades geométricas que cumplen los triángulos rectángulos isósceles y los triángulos rectángulos de ángulo 30º y 60º.

Triangulo rectángulo isósceles.

En todo triangulo rectángulo isósceles la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de sus catetos. Usando la semejanza de triángulos podemos considerar que el cateto mide 1 unidad así el triangulo será:



Luego

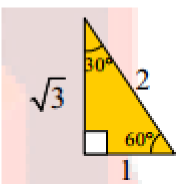
$$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

Triangulo rectángulo 30º , 60º.

En todo triangulo rectángulo 30º , 60º se cumple que el cateto opuesto al angulo de 30º mide la mitad de la hipotenusa . Usando la semejanza de triángulos podemos considerar que el otro cateto mide 1 unidad así el triangulo será:



y así

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

Toda esta información se simplifica en la siguiente tabla:

	0º	30º	45º	60º	90º
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind

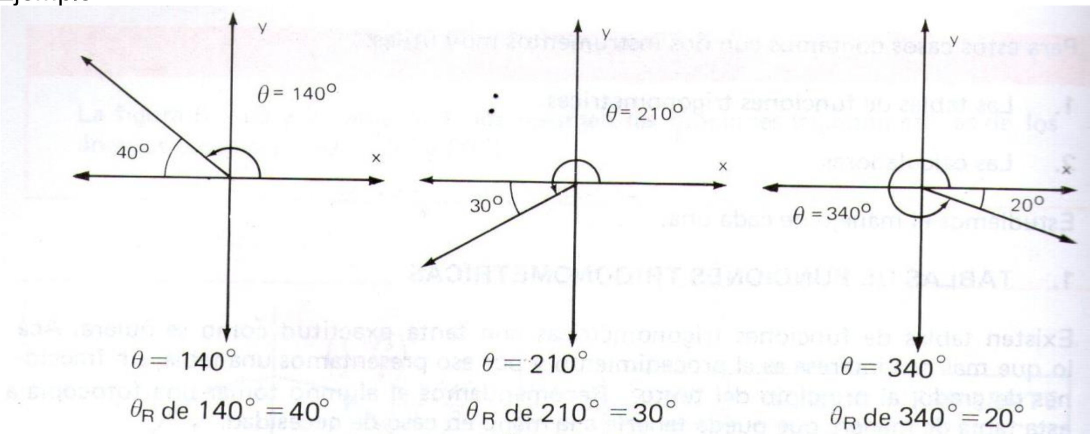
Angulo de referencia.

Para todo angulo θ en posición normal , el ángulo de referencia θ, denotado por θ_R es el angulo positivo menor que 90º, formado por el lado final de θ y el eje x.

Una vez conocidos los valores para los ángulos del primer cuadrante (angulos de referencia) podemos conocer de las funciones en los otros cuadrantes dado que el valor es el mismo pero el signo puede cambiar .

CUADRANTE	ANGULO DADO	ANGULO DE REFERENCIA
I	$0° < \theta < 90°$	$\theta_R = \theta$
II	$90° < \theta < 180°$	$\theta_R = 180° - \theta$
III	$180° < \theta < 270°$	$\theta_R = \theta - 180°$
IV	$270° < \theta < 360°$	$\theta_R = 360° - \theta$

Ejemplo



Ejemplo 2
Hallar las funciones trigonométricas de 225º
Como 225º está en el tercer cuadrante entonces $\theta_R = \theta$ - 180º luego $\theta_R =$ 225º-180º = 45º
Entonces:

Sen (225º) = -sen (45º) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cos (225º) = -cos (45º) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tan (225º) = tan (45º) = 1

<u>Definicion Las seis funciones trigonométricas:</u>
Existen seis funciones trigonométricas de las cuales hemos estudiado Seno, Coseno y Tangente. Las otras tres son cotangente (cot), secante (sec) y cosecante Csc) las cuales se definen como los inversos multiplicativos o recíprocos del Seno, coseno y tangente respectivamente.

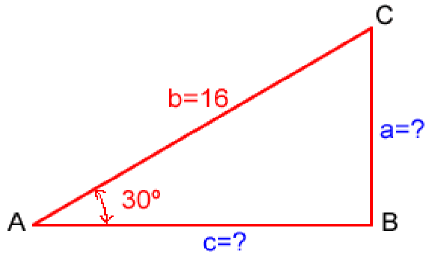
sec $\alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}$ csc $\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ Cot $\alpha = \frac{1}{tan\alpha}$

Es decir:

cot $\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ \ opuesto}$, sec $\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente}$, csc $\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto}$

<u>Problemas de aplicación</u>
<u>Ejemplos</u>

En la figura, el ángulo A = 30º y b = 16, determine la longitud de los demás lados del triángulo.



Los elementos solicitados son el lado opuesto a, el lado adyacente c al ángulo A (30º), y el lado conocido es el valor de la hipotenusa b.

Ahora, para encontrar la solución, tenemos que utilizar las funciones trigonométricas que nos relacione los datos conocidos y buscados:

Para obtener el valor de a, utilizamos la función:

$$\text{Sen } A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Sen 30º = a / b

a = b *Sen 30º

a = 0.5 * 16

a = 8

Para obtener el valor de c, utilizamos la función:

$$\text{Cos } A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Cos 30º = c / b

c = b * Cos 30º

c = 16 * 0.8660254

c = 13.856

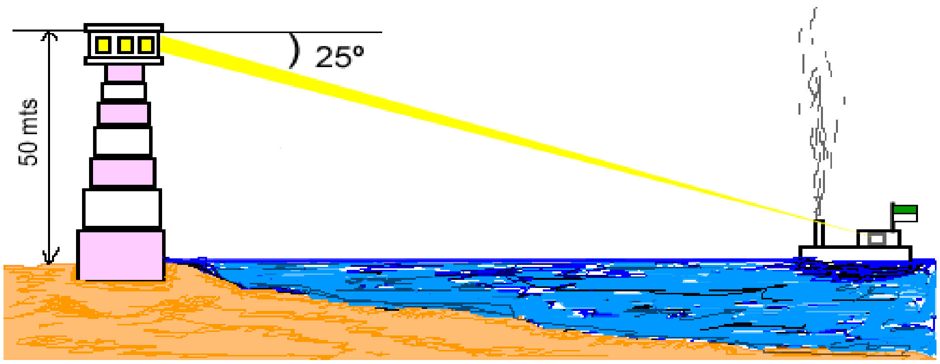
Para obtener el valor del ángulo C, aplicamos el teorema que dice que la suma interna de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.

A + B + C = 180º

30º + 90º + C = 180º

por lo tanto, el valor del ángulo C = 60º.

2. En la torre de un faro que está a una altura del piso de 50 metros, el vigilante advierte que se aproxima un barco formando un ángulo de depresión de 25º. ¿Cuál es la distancia que separa el barco del faro?



Una forma de solucionarlo es:	Otra solución es:
Tan 65º = d / 50	Tan 25º = 50 / d
d = 50 * Tan 65º	d = 50 / Tan 25º
d = 107.22 mts	d = 107.22 mts

2. ENLACES Y/O TEXTOS PARA PROFUNDIZAR LA TEMÁTICA

Ministerio de educación Nacional. **Vamos a aprender matemáticas grado 10. Página 76 a 83**

3. EJERCICIOS DE REPASO

1. Calcula el valor de la función circular para los siguientes ángulos y arcos
   a. $\propto = \frac{\pi}{2}$ radianes   b. θ= 0º   c. θ= 180º
2. Dado el punto trigonométrico encuentra el ángulo o el arco que corresponde.
   a. (0,1) con 0$\leq \alpha \leq 2\pi$ b.(-1,0) con 360º$\leq \alpha \leq 720$ º   c. (0,-1) con -720º$\leq \theta \leq -360$.
3. Halla el valor de las siguientes funciones trigonométricas, no uses calculadora.

1. Sen $(-\pi)$	2. Cos (7π)	3. Sen $(-\frac{3\pi}{2})$
4. Sen (-2π)	5. Cos $(-\pi)$	6. Tan (-2π)
7. Tan (3π)	8. Cos (-3π)	9. Tan $(-\pi)$
10. Sen (-3π)	11. Cos (12π)	12. Tan $(\frac{3\pi}{2})$
13. Sen $(90°)$	14. Cos $(180°)$	15. Tan $(-90°)$
16. Sen $(-270°)$	17. Cos $(1.080°)$	18. Tan $(-720°)$
19. Cos $(90°)$	20. Sen $(180°)$	21. Tan $(180°)$

4. Completa la siguiente tabla

	θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	180°	$\frac{3\pi}{2}$	360°	-90°	-3π	630°
x	$\text{Cos}(\theta)$	1	0						0
y	$\text{Sen}(\theta)$	0	1						

5. Si $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, encuentra las otras funciones. (seno, coseno, tangente, ….)

6. Si $\tan\alpha = \frac{5}{9}$, encuentra las otras funciones. (seno, coseno, tangente, ….)

7. Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usa calculadora. Recuerde que los angulos internos de un triangulo suman 180°

   a) α = 24º y c =16.
   b) a = 32 y b = 25
   c) α = 24º y a =16