YERMO Y PARRES

INSTITUCION EDUCATIVA

GUIA DE MATEMATICAS DEL 2° PERIODO	GRADO:9°1,2,3 Y 4	N° COPIAS:
MATERIA DE PROMOCIÓN: MATEMATICAS		
NOMBRE DEL DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO		SECCION:
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:		GRUPO:9°1,2,3 Y 4

Los temas a desarrollar en este segundo periodo están relacionados con las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 y sus aplicaciones en la vida diaria, además de los conocimientos previos en el manejo de probabilidades y la probabilidad condicional de eventos independientes y de eventos mutuamente excluyentes.

Esta guía didáctica será desarrollada paso a paso en cada una de las clases.
Se espera el compromiso directo de los estudiantes y padres de familia para adquirir la guía y acompañar a sus hijos en su aprendizaje para que se realice la práctica y las actividades que se proponen para apropiarse del saber.

Es importante tener en cuenta que el acompañamiento de los padres de familia es un factor importante para el desarrollo de actividades de trabajo independiente para lograr un aprendizaje más efectivo.

ECUACION DE LA RECTA

Conoce

5.1 Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

A la expresión $(y - y_1) = m(x - x_1)$ se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \longleftarrow \text{Ecuación de la recta}$$

La ecuación de una recta dados la pendiente m y un punto (x_1, y_1) es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -1)$ y cuya pendiente es -1 es:

$[y - (-1)] = -1[x - (-2)]$

$y + 1 = -x - 2$

$y = -x - 2 - 1$

$y = -x - 3$ (Figura 5.24)

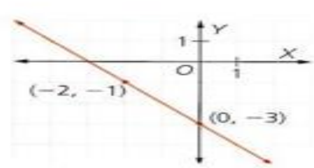


Figura 5.24

5.2 Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Usar la pendiente m calculada y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2) para reemplazar en la ecuación punto-pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Conoce

5.1 Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

A la expresión $(y - y_1) = m(x - x_1)$ se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \longleftarrow \text{Ecuación de la recta}$$

La ecuación de una recta dados la pendiente m y un punto (x_1, y_1) es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -1)$ y cuya pendiente es -1 es:

$$[y - (-1)] = -1[x - (-2)]$$
$$y + 1 = -x - 2$$
$$y = -x - 2 - 1$$
$$y = -x - 3 \text{ (Figura 5.24)}$$

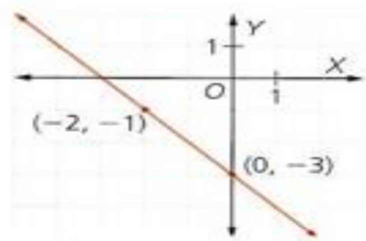


Figura 5.24

5.2 Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Usar la pendiente m calculada y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2) para reemplazar en la ecuación punto-pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Para un enfoque más visual, la página matematicasonline.es ofrece ejercicios de funciones lineales que cubren los fundamentos.

Explore el documento de MatemáticasIESOja para entender las diferentes formas de la ecuación de una recta.

Vea ejemplos prácticos en la guía de JICA, que se centra en el estudio de la línea recta.

El video de ejemplo en Youtube proporciona una explicación detallada paso a paso.

YouTube +3

VIDEO:
https://youtu.be/bo3JsAc9CbE

https://youtu.be/JWnk1BivjTw

6 Sistemas de ecuaciones lineales

Saberes previos

Plantea una ecuación que modele la siguiente situación y escribe un par de valores que haga cierta la igualdad: "Las edades de Fernanda y Camila suman 30".

Analiza

Para ingresar a una universidad se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos, pero por cada respuesta incorrecta (o que no se responda) se restan dos puntos.

- Si un aspirante obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió bien?

Conoce

La situación planteada resulta interesante, pues es posible pensar en un método de tanteo para solucionarla. Si el aspirante respondió quince preguntas bien y quince mal, el siguiente sería el esquema para el razonamiento:

$$\underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 5 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas correctas}} - \underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 2 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas incorrectas}} = 45 \text{ puntos}$$

De esta manera puede razonarse hasta encontrar una solución. Sin embargo, si se analiza el problema desde el punto de vista del álgebra, puede plantearse la "m" como la cantidad de preguntas respondidas correctamente y la "r" como la cantidad de preguntas respondidas de forma incorrecta. Así, el problema puede expresarse como sigue:

$$5m - 2r = 94 \quad \text{y} \quad m + r = 30$$

Si se analizan simultáneamente las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que son las condiciones del problema, se concluye que el aspirante respondió bien 22 preguntas.

Plantear y resolver un **sistema de ecuaciones** permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

6.1 Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo { y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación.

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones puede ser $2 \cdot 2$ si involucra dos ecuaciones y dos incógnitas. Así mismo, puede ser $n \cdot n$ si involucra n ecuaciones y n incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales hace referencia a encontrar los valores de las incógnitas que verifican, simultáneamente, las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, los sistemas pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:

  Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.

  Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.
- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

Ejemplo 1

El sistema planteado para modelar la situación inicial es compatible determinado, pues para resolverlo solo se determina que $m = 22$ y $r = 8$. De la misma forma, y sin saber ningún método de solución, puede determinarse que el sistema conformado por las ecuaciones $m + n = 3$ y $2m + 2n = 3$ es incompatible, pues no hay valores que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones.

6.2 Resolución de un sistema de ecuaciones

Antes de hablar acerca de cómo solucionar un sistema de ecuaciones, es importante aclarar que solo puede determinarse que la solución de dicho sistema es correcta al evaluar las dos ecuaciones con los valores determinados para las incógnitas. Si las ecuaciones se verifican, la solución es correcta; de lo contrario, no lo es.

Para el problema planteado se encontró que $m = 22$ y $r = 8$. Al verificar los valores del sistema propuesto se tiene que:

$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 22 - 2 \cdot 8 = 94$

$m + r = 30 \Rightarrow 22 + 8 = 30$

Puede determinarse que $m = 15$ y $r = 15$ no es una solución para el sistema, pues para la primera ecuación se tiene que:

$$m + r = 30 \Rightarrow 15 + 15 = 30$$

Mientras que para la segunda ecuación se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 45$$

Aunque se verifica la ecuación $m + r = 30$, puede observarse que para la ecuación $5m - 2r = 94$ los valores no proporcionan una igualdad; por esta razón no son una solución del sistema planteado.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones 2×2.

Tablas de valores

Gráficas de las ecuaciones lineales

Sustitución

Reducción

Igualación

Regla de Cramer

A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Tablas de valores y gráficas:** en estos métodos tiene gran relevancia el análisis de cada una de las ecuaciones, razón por la cual es importante aplicar los conceptos y procedimientos presentados en temas anteriores.
- **Sustitución, reducción e igualación:** estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, razón por la que se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.
- **Regla de Cramer:** on este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.

Cada uno de los métodos se explicará con mayor detalle en los siguientes temas de la unidad.

6.3 Resolución de sistemas de ecuaciones por tablas

A continuación se detallan algunos pasos útiles para resolver un sistema de ecuaciones con este método:

1.° Se elige una de las ecuaciones del sistema.

2.° Se despeja una de las incógnitas de la ecuación elegida. En este caso es aconsejable despejar la que resulte más sencilla.

3.° Se asigna un valor a la incógnita independiente. Es importante anotar que aunque este valor es arbitrario, deben tenerse en cuenta las condiciones del sistema y estimar valores que, a criterio propio, podrían ser la solución.

4.° Se realizan las operaciones planteadas en la ecuación para determinar el valor de la incógnita dependiente.

5.° Se reemplaza, en la segunda ecuación, los valores hallados en los pasos anteriores.

6.° Se comprueba si dichos valores verifican la segunda ecuación.

El proceso termina cuando los valores dados para la primera ecuación verifican la segunda ecuación.

Los pasos anteriores se registran en una tabla en la que las dos primeras filas son las incógnitas y la tercera fila es la segunda ecuación.

Ejemplo 2

Para solucionar el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$, pueden seguirse estos pasos:

1.° La ecuación elegida es $x + y = 3$.

2.° $y = 3 - x$

3.° $x = 3$

4.° Si $x = 3$, entonces $y = 0$

5.° En $-x + y = -1$ se tiene que: $-3 + 0 = -3$

6.° Los valores no verifican la ecuación $-x + y = -1$.

Ahora se repiten estos pasos y se completa una tabla hasta encontrar la solución del sistema. Los valores encontrados se muestran en la Tabla 5.19.

x	3	1	2
y	0	2	1
$-x + y$	-3	1	-1

Tabla 5.19

Los valores $x = 2$ y $y = 1$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema.

Para algunos sistemas la solución no se encuentra de forma tan sencilla como en el ejemplo anterior.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Resuelve el sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=30 \end{cases}$.

x	-1	0	2	5	7	11
y	-4	-3	-1	2	4	8
$2x+y$	-6	-3	3	12	18	30

Tabla 5.20

En la Tabla 5.20 se encuentra que los valores $x = 11$ y $y = 8$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema de ecuaciones dado.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Relaciona cada sistema de ecuaciones lineales con su respectiva solución.

Sistemas	Soluciones
a. $\begin{cases} 7m+9n=42 \\ 12m+10n=-4 \end{cases}$	$m=3; n=4$
b. $\begin{cases} m+6n=27 \\ 7m-3n=9 \end{cases}$	$m=-4; n=-5$
c. $\begin{cases} 3m+5n=7 \\ 2m-n=-4 \end{cases}$	$m=-1; n=2$
d. $\begin{cases} 3m-2n=-2 \\ 5m+8n=-60 \end{cases}$	$m=-12; n=14$

2 Explica por qué los valores dados no son una solución del sistema de ecuaciones lineales. Luego, escribe un párrafo en el que justifiques tu modelo de solución.

a. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

$x=3; y=7$

b. $\begin{cases} 7a+4b=13 \\ 5a-2b=19 \end{cases}$

$a=0; b=\dfrac{13}{4}$

c. $\begin{cases} 5t+6s=20 \\ 4t-3s=-23 \end{cases}$

$t=-1; s=3$

d. $\begin{cases} 2w+5z=-24 \\ 8w-3z=19 \end{cases}$

$w=1; z=-\dfrac{2}{3}$

Resolución de problemas

3 La diferencia entre dos números es 5, y si se suman, el total es 29. Encuentra los dos números.

Evaluación del aprendizaje

i Soluciona los siguientes sistemas con tablas a partir de los valores propuestos.

a. $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-4y=-26 \end{cases}$

x	0	8	1	4	3
y					
$2x-4y$					

Tabla 5.21

b. $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$

x	21	0	3	7	6
y					
$x-y$					

Tabla 5.22

ii Soluciona los sistemas de ecuaciones con tablas.

a. $\begin{cases} a-5b=8 \\ -7a+8b=25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4m-5n=8 \\ 8m-9n=-77 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4z+5w=5 \\ -10w-4z=-7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x+5y=-24 \\ 8x-3y=19 \end{cases}$

7 Resolución de sistemas por el método gráfico

Saberes previos

Representa en un mismo plano cartesiano las funciones $y = 4x - 1$ y $y = -2x + 5$. ¿Tienen algún punto en común?

Analiza

Para llenar un tanque de 31 m^3 se abren dos llaves simultáneamente. Una de ellas se cierra siete horas después de abrirla y la otra, dos horas después. Luego, intenta llenarse un tanque de 27 m^3 con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a las cuatro horas de abrirla y la segunda, a las tres horas.

- ¿Cuántos litros salen de cada llave en una hora?

Conoce

En la situación presentada puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo, x y y.

Según las condiciones del problema, la relación entre x y y puede expresarse así:

Para el tanque de 31 m^3: $7x + 2y = 31$

Para el tanque de 27 m^3: $4x + 3y = 27$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de ecuaciones asociado a la situación inicial, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

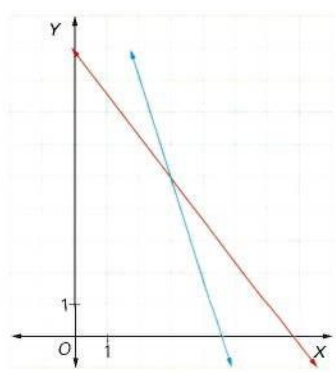


Figura 5.28

En la Figura 5.28 se observa que el punto en el cual se intersecan las dos rectas es (3, 5); es decir, la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$.

Por lo tanto, de la primera llave salen tres litros de agua en una hora y de la segunda salen cinco litros de agua en una hora.

7.1 Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones

Gráficamente es posible identificar sistemas de ecuaciones compatibles determinados (las rectas se intersecan en un solo punto), compatibles indeterminados (las rectas coinciden) e incompatibles (las rectas no se intersecan).

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

Compatible determinado

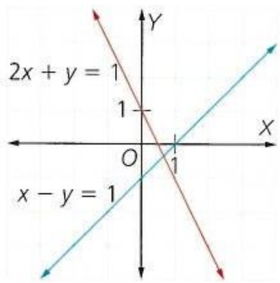


Figura 5.29

Compatible indeterminado

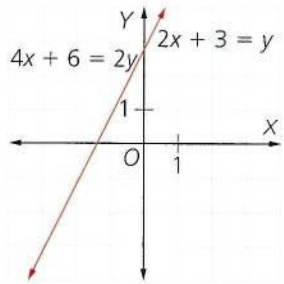


Figura 5.30

Incompatible

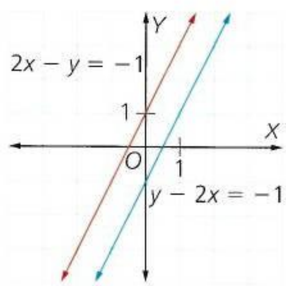


Figura 5.31

Ejemplo 2

Los siguientes sistemas muestran la clasificación de las posibles soluciones de un sistema. Las gráficas correspondientes aparecen en las figuras 5.32 a 5.34, respectivamente.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Incompatible	Compatible determinado	Compatible indeterminado

El primer sistema es incompatible porque las rectas tienen la misma pendiente, es decir, las rectas son paralelas. El segundo sistema es compatible determinado porque las rectas se intersecan en (0, 2).

El tercer sistema es compatible indeterminado porque las ecuaciones que conforman el sistema son equivalentes.

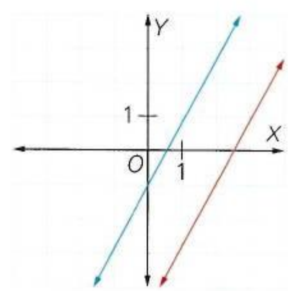


Figura 5.32

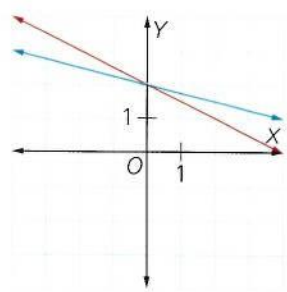


Figura 5.33

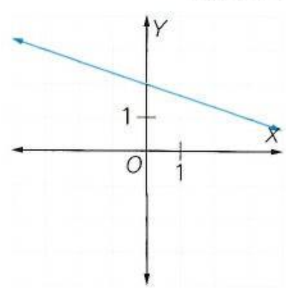


Figura 5.34

7 Resolución de sistemas por el método gráfico

MatemaTICS

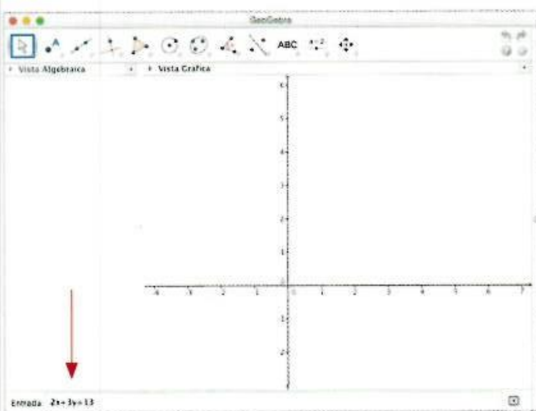
Grafica sistemas de ecuaciones con GeoGebra

A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones con este *software*.

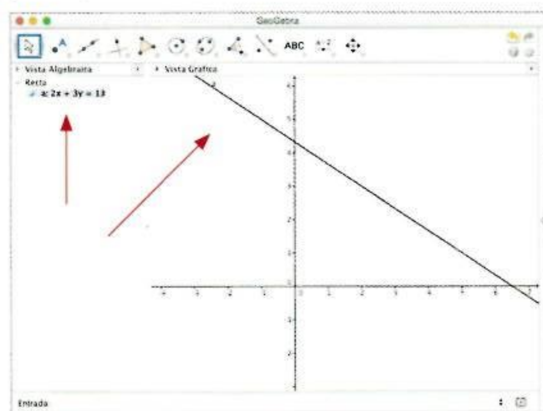
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

- Primero, en el menú *Apariencias*, selecciona la opción *Álgebra y Gráficos*.

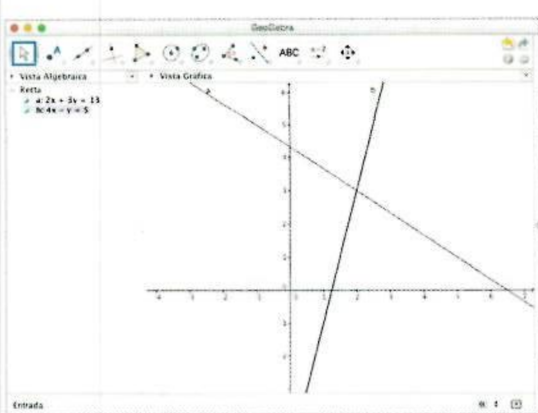
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada *Entrada*. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.



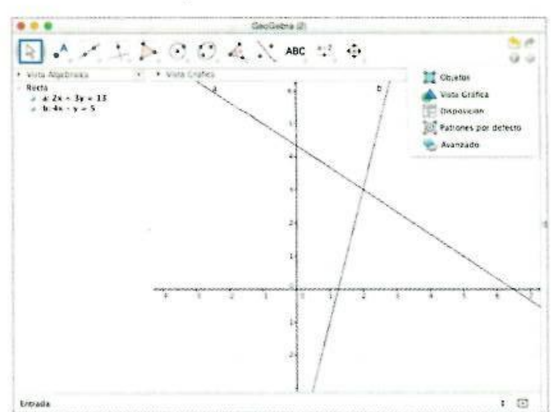
- Al presionar la tecla *Enter*, aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.



- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.



Para determinar las coordenadas del punto de intersección, pon una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú *Preferencias*. Allí, elige *Vista gráfica*, y luego activa la *Cuadrícula* dando clic en la opción *Mostrar cuadrícula*.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Grafica y soluciona cada sistema.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Razonamiento

2 Determina la solución de cada sistema de ecuaciones. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

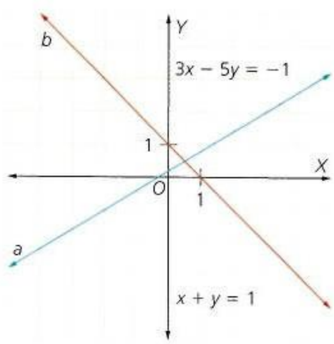


Figura 5.35

b.

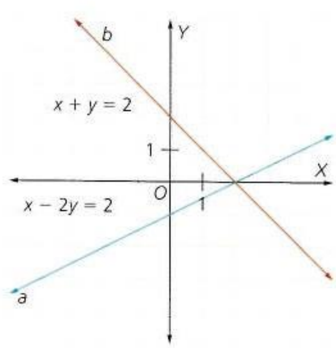


Figura 5.36

c.

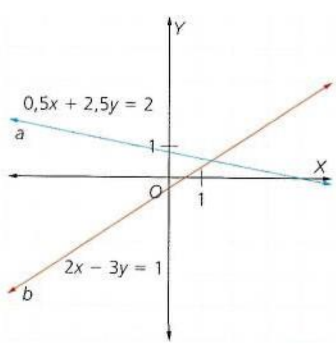


Figura 5.37

Resolución de problemas

3 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

a. $x = 2 \quad y = 21$ b. $(4{,}5, 2)$ c. $(-2, -0{,}5)$

Evaluación del aprendizaje

i Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones lineales con $6x - 2y = -3$, de tal forma que sea:

a. Determinado

b. Indeterminado

c. Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste. Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

ii Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.

a.

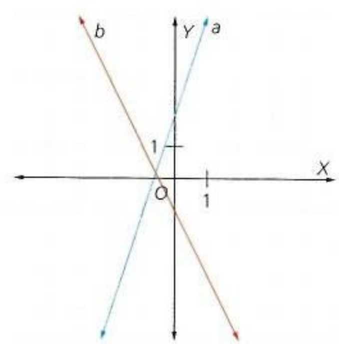


Figura 5.38

b.

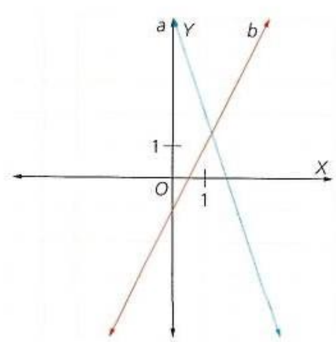


Figura 5.39

8 Resolución de sistemas por el método de sustitución

Saberes previos

Despeja la variable y de la ecuación $3y + 4x - 12 = 0$ y describe el procedimiento que realizas.

Analiza

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.

- ¿Cuántos animales hay de cada especie?

Conoce

El sistema de ecuaciones que representa la situación puede resolverse con el **método de sustitución**. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

m: cantidad de patos $\quad$ n: cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales: $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales: $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$ ← Se despeja m en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$ ← Se sustituye $m = 50 - n$ en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$ ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$ ← Se despeja n.

$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \dfrac{34}{2} \Rightarrow n = 17$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión $m = 50 - n$, así:

$$m = 50 - 17 = 33.$$

De esta manera, en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

Ejemplo 1

Para resolver el sistema de ecuaciones se realiza el procedimiento descrito.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja x.

$$x = -3 - 2y$$

Este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 5.40.

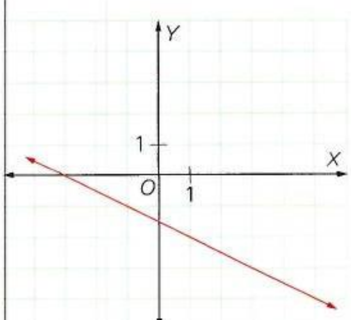


Figura 5.40

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

2 Resuelve cada sistema de ecuaciones con el método de sustitución.

Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase. Para ello, utiliza solo el valor de la solución en la incógnita y.

a. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \dfrac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$ Letra N

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} - \dfrac{3y}{4} = 7 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{8} = 0 \end{cases}$ Letra I

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ Letra L

d. $\begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{5x}{6} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{4} = 1 \end{cases}$ Letra A

e. $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{7y}{6} = -12 \end{cases}$ Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

___	___	___	___	___	___	___	___
−4	3	−4	12	−8	6	−8	6

Resolución de problemas

3 Analiza el sistema y determina el valor que debe tomar a para que el sistema cumpla cada condición dada.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$

Compatible determinado

Incompatible

Evaluación del aprendizaje

Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.

a.

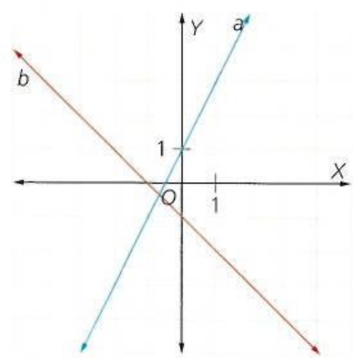


Figura 5.41

b.

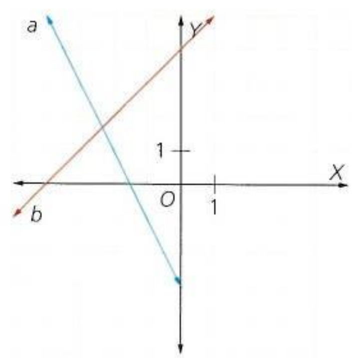


Figura 5.42

c.

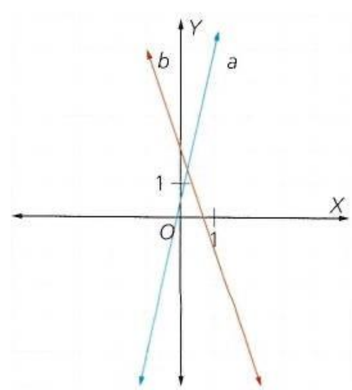


Figura 5.43

9 Resolución de sistemas por el método de reducción

Saberes previos

¿Por cuál número entero debes multiplicar todos los términos de la ecuación $3x + 2y = 5$, para que al sumarlos con los términos de la ecuación $6x + y = 8$, se obtenga $-3y = -2$?

Analiza

Un ama de casa va al supermercado y compra 6 kg de café y 3 kg de azúcar por \$ 15 300. Días después nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 10 kg de azúcar por \$ 8 250.

- ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Analiza y conoce

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación.

Sean C: un kilogramo de café y A: un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tienen las ecuaciones: $6C + 3A = 15\,300$ y $C + 10A = 8\,250$. Así, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ C + 10A = 8\,250 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción,** se elimina una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de la situación inicial por el método de reducción, pueden seguirse los pasos que se describen a continuación.

1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.

2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por -6, con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ -6C - 60A = -49\,500 \end{cases}$$

3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{rcr} 6C + 3A & = & 15\,300 \\ -6C - 60A & = & -49\,500 \\ \hline 0C - 57A & = & -34\,200 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita, que es A.

4.° Se soluciona la ecuación así: $-57A = -34\,200$, y se obtiene que $A = 600$.

5.° Se reemplaza el valor $A = 600$ en una de las ecuaciones:

$$C + 10A = 8\,250 \Rightarrow C = 8\,250 - 6\,000 \Rightarrow C = 2\,250.$$

Por lo tanto, un kilogramo de azúcar cuesta \$ 600 y un kilogramo de café cuesta \$ 2 250.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

Razonamiento

2 Resuelve cada sistema por reducción y busca su solución gráfica abajo (si no está entre las opciones, dibújala en tu cuaderno).

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

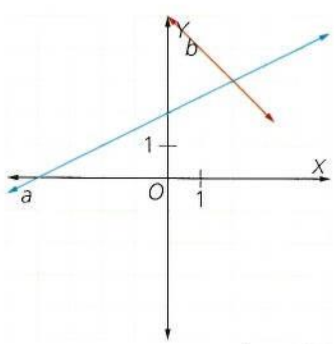


Figura 5.44

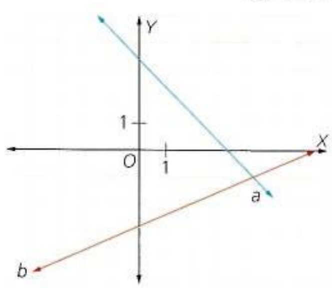


Figura 5.45

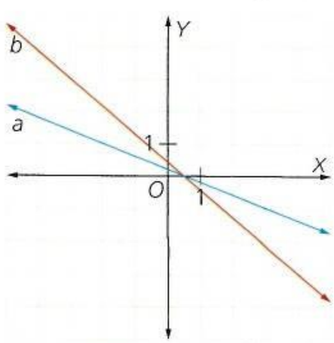


Figura 5.46

Resolución de problemas

3 Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde la pregunta.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a_2 y b_2 tiene el sistema infinitas soluciones?

Evaluación del aprendizaje

Escribe la segunda ecuación en los literales a, b y c, y dibuja una recta en d. y e. de tal forma que cada sistema sea del tipo que se indica.

a. $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible determinado

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible indeterminado

c. $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ \end{cases}$ Incompatible

d.

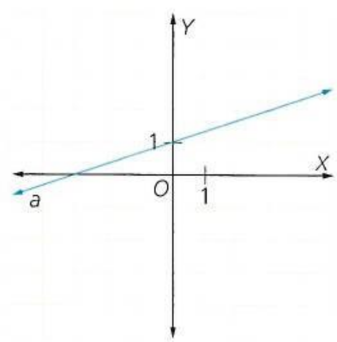


Figura 5.47

Incompatible

e.

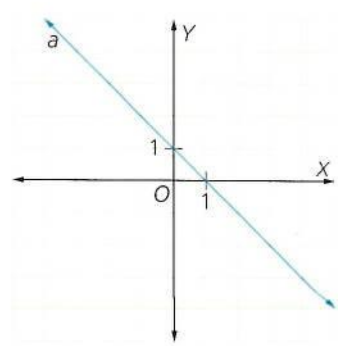


Figura 5.48

Compatible indeterminado

10 Resolución de sistemas por el método de igualación

Saberes previos

Da diez valores a las variables m y n y verifica si en todos los casos se cumple la igualdad

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Analiza

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 6, la diferencia de las fracciones obtenidas es 1.

- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

Analiza y conoce

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta se consideran las siguientes incógnitas:

x: primer número y: segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que describe la situación

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicar la transitividad de las igualdades, con el fin de igualarlas y despejar la otra incógnita.

Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona como se muestra a continuación.

1.° Se despeja y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de y.

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja x.

$$-x - 2x = -6 - 51$$
$$-3x = -57$$
$$x = 19$$

4.° Se calcula el valor de y.

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

Ejemplo 2

Para resolver el sistema $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$ se puede elegir m para despejar en las dos ecuaciones.

$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \dfrac{15 + 3n}{7}$ y $5m = 27 - 6n, \Rightarrow m = \dfrac{27 - 6n}{5}$

Se igualan las expresiones y se despeja n: $\dfrac{15 + 3n}{7} = \dfrac{27 - 6n}{5} \Rightarrow n = 2$

Se reemplaza el valor de n en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de m: $m = \dfrac{15 + 3n}{7}$. Como, $n = 2$, se tiene que $m = \dfrac{15 + 3(2)}{7}$ por tanto, $m = 3$. La solución gráfica se muestra en la Figura 5.49.

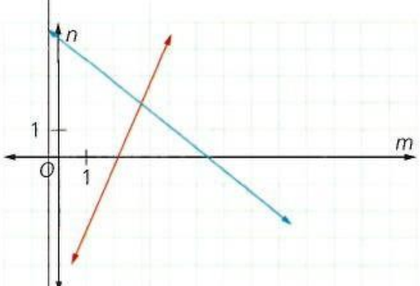


Figura 5.49

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = -\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

Razonamiento

2 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución de cada sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$4n = 13 - 7m \qquad 5m - 2n = 19$

$n = \dfrac{13 - 7m}{4} \qquad n = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$\dfrac{13 - 7m}{4} = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$m = -\dfrac{50}{34} = -\dfrac{25}{17}$

Reemplazando para n, se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo, $m = -\dfrac{25}{17}$ y $n = \dfrac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$x = 10 - 2y \qquad x = \dfrac{5 - 4y}{2}$

$10 - 2y = \dfrac{5 - 4y}{2} \qquad 20 - 2y = 5 - 4y$

$-2y + 4y = 5 - 20 \qquad y = -\dfrac{15}{2}$

Remplazando para x, se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

3 Plantea dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados. Ten en cuenta las siguientes ecuaciones.

$2x - y = 1$ | $x + y = 5$ | $x - y = 12$ | $x + y = 100$ | $-2y + 5x = 10$ | $2y - x = -3$ | $2x - y = -3$ | $2x + 10y = 40$ | $3x - 30y = 15$ | $3x + 3y = 15$ | $-8y + 20x = 40$ | $2y - x = 1$

4 Reúnete con cuatro compañeros y entre todos solucionen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos estudiados. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para resolver este sistema.

Resolución de problemas

5 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.

Evaluación del aprendizaje

i Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

ii Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el número obtenido es igual al dado más nueve unidades. Halla dicho número.

11 Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Saberes previos

En el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -3y = 5x - 1 \end{cases}$, ¿cuáles son los coeficientes, los términos independientes y las variables?

Analiza

En una finca se envasan 300 L de leche al día. Para ello, se usan botellas de 2 L y botellas de 5 L, y en total se usan 120 botellas.

- ¿Cuántas botellas de cada capacidad se usan?

Analiza y conoce

Si se considera que:

x: botellas de 2 L $\quad$ y: botellas de 5 L

La información inicial se representa así:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases}$$

El método para solucionar este sistema se basa en el concepto de **matriz**.

Una **matriz** es la disposición de números que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

Es posible asignar a una matriz un número real llamado *determinante de la matriz*. Para un sistema de ecuaciones $2 \cdot 2$, en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación, y las constantes son c_1 y c_2 respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz	Matriz ampliada
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse en un sistema de ecuaciones, así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Aplicando la regla de Cramer a la situación inicial, se tiene que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 300 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 300}{5 - 2} = 100 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - 240}{5 - 2} = 20$$

Luego, se usan 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula los siguientes determinantes.

a. $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} c^2 & a \\ c^2 - a & a \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} x+2 & x+7 \\ x+7 & x+2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & m^2 \end{vmatrix}$

2 Determina el valor de la variable en cada caso.

a. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 15$

b. $\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = 100$

c. $\begin{vmatrix} x & -8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 16$

d. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 25$

Razonamiento

3 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por el método de Cramer y explica la representación gráfica de cada solución.

a. $\begin{cases} 9x - y = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3y + 7x = -13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x + 3y = -26 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ 7x - 5y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 6x - 5y = -43 \\ x - 5y = -28 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2(x - y) = 5 \\ 4(1 - y) = 3x \end{cases}$

4 Intenta resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer y explica lo que ocurre.

a. $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 10x - 14y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 4x + 8y = 10 \end{cases}$

Escribe una conclusión acerca de lo que acabas de observar.

Resolución de problemas

5 Una evaluación consta de 16 preguntas. El maestro suma diez puntos por cada respuesta correcta y resta seis puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si Mario obtuvo 64 puntos en la evaluación, ¿cuántas preguntas contestó correctamente?

6 El administrador de una fábrica de computadores establece un plan de producción para dos modelos, *A* y *B*, y cuenta con dos divisiones.

Una división es el taller de máquinas donde se fabrican las partes del producto y la otra es la división de ensamble donde se unen las partes para obtener el producto final. El modelo *A* requiere cuatro horas para elaborar las piezas y cinco horas para ensamblarlas, y el modelo *B* requiere tres horas para elaborar las piezas y una para ensamblarlas.

Si la fábrica dispone de 95 horas mensuales para elaborar las piezas y 105 horas mensuales para ensamblarlas, ¿cuántos computadores tipo *A* y tipo *B* se pueden construir mensualmente en esta fábrica?

7 Dos jarras pequeñas y una jarra grande pueden contener ocho vasos de agua. Una jarra grande menos una jarra pequeña constituye dos vasos de agua. ¿Cuántos vasos de agua caben en cada jarra?

Evaluación del aprendizaje

i Una prueba tiene veinte preguntas por valor de 100 puntos. La prueba consiste en preguntas de verdadero y falso por valor de tres puntos cada una, y preguntas de selección múltiple por valor de once puntos cada una. ¿Cuántas preguntas de selección múltiple se encuentran en la prueba?

ii A lo largo del año 2015 se produjeron 11 600 accidentes de tráfico, de los cuales 5 600 se debieron a exceso de velocidad. Averigua el número de autos y de motos accidentados, si el 40% de los accidentes de autos y el 60% de los de motos se produjeron por no ir a la velocidad reglamentaria.

12 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Saberes previos

Plantea una situación que se pueda representar con el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5000x + 10000y = 12000 \\ 13000x - 2300y = 5000 \end{cases}$ y resuélvelo.

Analiza

Hace cuatro años la edad de Cristina era el doble de la de Juliana. Dentro de ocho años la edad de Juliana será $\frac{5}{8}$ de la de Cristina.

- ¿Qué edad tienen actualmente Cristina y Juliana?

Analiza y conoce

Según los datos del problema, si x es la edad actual de Cristina y y es la edad actual de Juliana, se tiene que:

$x - 4$: edad de Cristina hace 4 años

$y - 4$: edad de Juliana hace 4 años

$$x - 4 = 2(y - 4)$$

Además:

$x + 8$: edad de Cristina dentro de 8 años

$y + 8$: edad de Juliana dentro de 8 años

$$\frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8)$$

Las condiciones planteadas en el problema forman el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 4 = 2(y - 4) \\ \frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8) \end{cases}$$

Por el método de sustitución, se tiene que:

$$x = 2(y - 4) + 4 \qquad x = 2y - 8 + 4 \qquad x = 2y - 4$$

Ahora, se reemplaza x en la segunda ecuación y se tiene que:

$$\frac{5}{8}(2y - 4 + 8) = y + 8$$

$$10y + 20 = 8y + 64$$

$$10y - 8y = 64 - 20 \Rightarrow 2y = 44$$

De esta manera, $y = 22$ y $x = 2y - 4$. Por lo tanto, $x = 40$.

En conclusión, Cristina tiene 40 años y Juliana tiene 22 años.

Al finalizar la solución, es importante verificar que la respuesta hallada cumple las condiciones y el contexto del problema. Para ello, se reemplazan los valores en el sistema de ecuaciones, así:

$$\begin{cases} 40 - 4 = 2(22 - 4) \\ \frac{5}{8}(40 + 8) = 22 + 8 \end{cases}$$

Plantear y solucionar un problema en el que se involucran sistemas de ecuaciones se basa en escribir en forma algebraica, con incógnitas, las diferentes condiciones del problema. Luego, el sistema generado se resuelve con alguno de los métodos estudiados anteriormente y se determina la respuesta al problema.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Un automóvil que avanza a 70 km/h lleva una ventaja de 90 km a otro auto que avanza por una vía paralela a 110 km/h. ¿Alcanza el segundo auto al primero? Explica las razones.

2 El perímetro de un triángulo isósceles mide 20 cm. El lado desigual mide 4 cm menos que los lados iguales. Calcula el área de ese triángulo.

Razonamiento

3 En una granja hay conejos y gansos que hacen un total de 29 cabezas y 92 patas. ¿Hay más gansos que conejos? Explica tu razonamiento.

4 Analiza si el siguiente problema tiene solución. La suma de dos números es 14. Si se añade 1 al mayor se obtiene el doble del menor.

5 Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 años y 25 años. ¿En algún momento el producto de sus edades era 640?

Modelación

6 María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que encargó la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo.

Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían dos horas. María, ella sola, emplearía tres veces más tiempo que Bianca, también en solitario. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo?

Resolución de problemas

7 La suma de las tres cifras de un número capicúa es 8. La suma de la cifra de las unidades y la de las centenas es igual a la de las decenas. Calcula el número.

8 La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, la edad del padre era el quíntuple de la edad que tenía la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

9 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 cm y a su lado contiguo en 3 cm, el área de la figura aumenta en 71 cm^2. Calcula el lado del cuadrado.

10 En un cajón de una papelería guardan dos tipos de bolígrafos: hay cajas con doce bolígrafos azules y cajas con 16 bolígrafos rojos. En total hay diez cajas y 144 bolígrafos. ¿Cuántas cajas hay de cada clase? Plantea las ecuaciones del sistema y resuélvelo por tablas y por otro método.

11 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por \$ 500 el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de \$ 800, para conseguir 50 kg de pasta de \$ 620 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

Evaluación del aprendizaje

i Por una sudadera y unos tenis se pagaron en total \$ 126 000. Si el precio de la sudadera aumentara en un 14%, entonces sería igual al 75% del precio de los tenis. ¿Cuánto costó cada artículo?

ii Con la ayuda de los estudiantes de varios colegios se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado.

Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1 000 m^3 que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 m.

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

Estilos de vida saludable

De una encuesta aplicada a 36 000 jóvenes, se obtuvo que algunos han probado bebidas alcohólicas (x) y otros, sustancias psicoactivas (y). Si se sabe que $20\%x = 10\%y$, ¿cuántos jóvenes han probado cada sustancia?

- Describe los diversos problemas que trae el consumo de alcohol y drogas.

15 Clases de eventos

Pensamiento aleatorio

Saberes previos

Hay una urna con 20 balotas numeradas del 1 al 20. Escribe cinco eventos asociados a la situación.

Analiza

Se lanza una moneda dos veces consecutivas.

- Si en el primer lanzamiento sale cara, ¿es más probable, menos probable o igualmente probable que salga cara en el segundo lanzamiento?

Conoce

Existen experimentos en los que un resultado no afecta a otro.

Si se lanza una moneda varias veces, el resultado que se obtenga al hacerlo la primera vez no afecta el resultado del siguiente lanzamiento.

15.1 Sucesos aleatorios

Un **suceso** o **evento aleatorio** es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 1

El espacio muestral de lanzar un dado es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ahora bien, los posibles resultados para el evento "Lanzar un dado y que caiga en un número impar" son $A = \{1, 3, 5\}$. Se puede observar que los resultados del suceso están contenidos en el espacio muestral, es decir, $A \subseteq \Omega$

15.2 Clases de eventos

Dos eventos pueden ser **independientes**, **dependientes**, **mutuamente excluyentes**, **compatibles** e **incompatibles**.

- Dos eventos son **independientes** si el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primero. Si A y B son eventos independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Dos eventos son **dependientes** si el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento. Se escribe $P(B/A) = P(A \text{ y } B)/P(A)$.
- Dos eventos contrarios son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir al mismo tiempo. Si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Dos eventos son **compatibles** cuando tienen algún suceso elemental común. Si A y B son compatibles, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dos eventos son incompatibles si no se pueden verificar simultáneamente. Si A y B son **incompatibles**, entonces $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 2

- Lanzar al aire dos veces una moneda: eventos **independientes**.
- Sacar una carta después de sacar una carta sin regresarla al mazo: eventos **dependientes** (el resultado de la segunda extracción depende de la primera carta extraída).
- Sacar una carta que sea un as y un rey: eventos **incompatibles** (ya que no pueden verificarse simultáneamente).
- Sacar puntuación par al tirar un dado y obtener múltiplo de 3: eventos **compatibles** (porque el 6 es un suceso elemental común).
- Sacar un número par al tirar un dado y sacar un número impar: eventos **mutuamente excluyentes** (porque $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing$).

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Una caja contiene cuatro fichas rojas, tres verdes y dos azules. Se saca una ficha de la caja, luego se devuelve y se saca otra ficha. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera ficha sea azul y la segunda sea verde?

2. Una caja contiene cuatro fichas rojas, tres verdes y dos azules. Se saca una ficha de la caja y no se devuelve. Si se saca otra ficha de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera ficha sea azul y la segunda sea verde?

Razonamiento

3. Se efectúa una encuesta telefónica a 1000 personas para saber si creen necesario que se racione la energía eléctrica una hora diaria.

   De los 390 hombres que contestaron, 215 respondieron que sí, y el resto que no. De las 610 mujeres que contestaron, 351 estuvieron de acuerdo, mientras que las demás no lo estuvieron.

   Sean los sucesos *A*: "Estar de acuerdo con el racionamiento" y *B*: "Que haya respondido un hombre", ¿son *A* y *B* independientes? Justifica.

4. Al lanzar un dado se consideran los sucesos:

   A: "Caer en número par", *B*: "Caer en un número mayor que 3" y *C*: "Caer en un número impar". De los tres pares de sucesos posibles (*A* y *B*, *A* y *C* y *B* y *C*), indica cuáles son compatibles y cuáles son mutuamente excluyentes.

Modelación

5. El 40% de un grupo juega baloncesto y el 60%, fútbol. Si el 85%, practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?

6. Se lanza un dado, y si no sale 6, se lanza de nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6 en el segundo lanzamiento?

7. Se saca una ficha de una bolsa donde hay dos canicas rojas, dos blancas y una verde. Se observa el color, se devuelve a la bolsa y se saca otra ficha. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja en las dos extracciones?

8. Jorge tiene diez cartas numeradas del 1 al 10 y las pone boca abajo. Él escoge una carta al azar y la voltea. Si la carta tiene un número mayor que 5, la pone en una pila. Si la carta tiene el número 5 o un número menor, la pone en una segunda pila. Él gana el juego si logra juntar tres cartas en la primera pila antes de juntar tres cartas en la segunda pila.

   Elige el enunciado que mejor describe la situación.

   a. Los eventos son independientes, porque en el juego no se devuelve ninguna carta.

   b. Los eventos son independientes, porque en cada ronda se puede sacar una carta con un número mayor que 5 o uno igual o menor que 5.

   c. Los eventos no son independientes, porque un resultado es eliminado en cada turno y no es reemplazado.

Resolución de problemas

9. Se lanza un dado de seis caras y se anotan cuántos puntos se ven en su cara superior. Se consideran los sucesos $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{5\}$.

   a. ¿Cómo son los sucesos *A* y *B*?

   b. ¿Cómo son los sucesos *B* y *C*?

10. Si *A* y *B* son dos sucesos mutuamente excluyentes, y la probabilidad de *A* es 0,3 y la de *B* es 0,6, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos?

11. En una clase hay diez niños y doce niñas. De ellos, cinco niños y ocho niñas tocan algún instrumento musical. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea niña y toque un instrumento?

Evaluación del aprendizaje

✓ Luis tiene ocho pares de medias: dos negros, dos cafés, dos blancos, uno rojo y uno azul. Quiere ponerse un par de medias blancas, pero tiene prisa para llegar al trabajo, por lo que agarra un par al azar. Si no es blanco, lo devolverá al cajón. Si continúa agarrando pares aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de sacar un par blanco en su tercer intento?