GUÍA DIDÁCTICA GEOMETRÍA – GRADO NOVENO

PERIODO DOS

Objetivo general: Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y otras disciplinas. Identificar postulados y axiomas básicos en geometría.
Objetivos Específicos: Usar diversos métodos de demostración matemática.
Temas: El proceso de la demostración. Segmentos proporcionales Circunferencia. Posiciones de una recta y una circunferencia.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS.

- Los saberes previos será la base de los conceptos para ser abordados y complementar lo que ya saben.
- Videos de apoyo para ser vistos previos y después de las clases.
- Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes, con el fin de que resulten motivadoras.
- Hacer uso de las TICS para retroalimentar, los conceptos de la unidad didáctica.
- Apoyo contante de los textos. Vamos a aprender matemática grado 9. Dispuestos en el aula para ser usados en clase.

Evaluación: Talleres, actitud en clase, tareas y consultas para realizar en casa, evaluaciones escritas.

1. El proceso de la demostración

Una **demostración** consiste en un conjunto de supuestos, llamados **axiomas** o **premisas**, que se combinan de acuerdo con las reglas lógicas, para deducir, como **conclusión**, la proposición que se está demostrando.

Ejemplo 1:

María Fernanda afirma que, si se suman dos números impares a y b, el resultado es un número par. ¿Qué está suponiendo María Fernanda y qué quiere probar?

Ella supone que a y b son números impares y debe demostrar que a + b es un número par.

Ejemplo 2:

En el enunciado “toda recta, paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales”, se identifica:

- **Hipótesis:** Es una recta paralela a un lado de un triángulo.
- **Tesis:** Recta, divide a los otros dos lados del triángulo en segmentos proporcionales.

En el ejemplo 2.

Tenemos las definiciones de: triángulo, rectas paralelas, Razón entre segmentos proporcionales.

Axiomas: Por un punto exterior a la recta pasa una única recta paralela a la recta dada.

Teorema: Los segmentos que se generan en dos rectas transversales, al ser cortadas por rectas paralelas, son proporcionales.

Método directo de demostración

El método directo de demostración es un método de razonamiento en el cual, se tiene una secuencia de proposiciones

$P_1, P_2, \ldots, P_n$, de manera que $P_1 \rightarrow P_2$, $P_2 \rightarrow P_3$, $\ldots . P_{n-1} \rightarrow P_n$, se puede concluir que

$$P_1 \rightarrow P_n$$

Ejemplo 3

Para probar que en un $\triangle ABC$, $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$, se construye una tabla de afirmaciones y justificaciones (Tabla 2.1) y una figura auxiliar.

Afirmación	Justificación
Se traza $\overleftrightarrow{XY}$, que pasa por C y es paralela a $\overline{AB}$.	Por un punto exterior a una recta pasa una paralela a esta (Figura 2.1).
$m\measuredangle XCY = 180°$	Un ángulo de lados colineales mide 180°.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle C = m\measuredangle XCY$	Teorema de la adición de ángulos.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle C = 180°$	Propiedad transitiva de la igualdad.
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle B$ y $m\measuredangle 2 = m\measuredangle A$	Los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes.
$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$	Principio de sustitución.

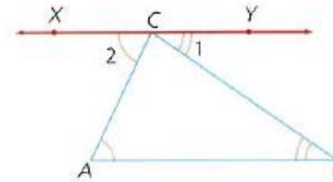


Figura 2.1

El anterior ejemplo es para probar que en todo triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°

Método indirecto de demostración

Consiste en:

1. Negar la tesis del enunciado.

2. Suponer cierta la negación de la tesis.

3. Elaborar un a cadena de razonamientos que se siguen lógicamente de la negación de la tesis.

4. Obtener una contradicción y afirmar la tesis inicial.

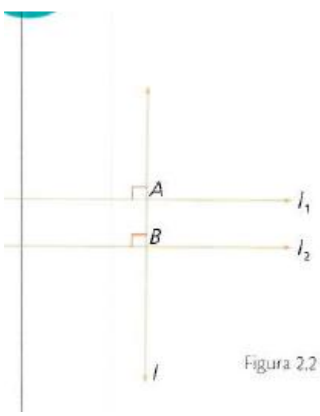


Figura 2.2

Ejemplo 4

Para demostrar que "Si dos rectas coplanares l_1 y l_2 son tales que $\overleftrightarrow{l_1} \perp \overleftrightarrow{l}$ en A y $\overleftrightarrow{l_2} \perp \overleftrightarrow{l}$ en B, entonces $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$"(Figura 2.2), se niega la tesis suponiendo que las rectas se intersecan en un punto R (Figura 2.3). Así, se tiene que:

Afirmación	Justificación
l_1 interseca a l_2 en R	Dado (nueva hipótesis)
l_1 pasa por R y $l_1 \perp l$	Dado (nueva hipótesis)
l_2 pasa por R y $l_2 \perp l$	Dado (nueva hipótesis)

Tabla 2.2

Se tendrían entonces dos rectas perpendiculares a l que pasan por R, lo cual es imposible pues "desde un punto exterior a una recta dada hay a lo sumo una perpendicular a la recta dada". De lo anterior, se concluye que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$.

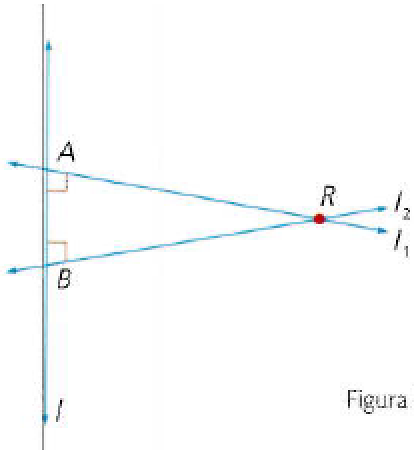


Figura 2.3

Método de refutación por contraejemplo

Consiste en probar la falsedad de una proposición, mostrando un caso o un ejemplo de un individuo o una situación para el que no se cumple la afirmación.

Ejemplo 5

El teorema de Tales enuncia lo siguiente:

Si la transversal t_1 corta a las rectas paralelas l_1, l_2 y l_3 en A, B y C, respectivamente, y la transversal t_2 lo hace en D, E y F, respectivamente, entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Este teorema se demuestra por el método directo como se muestra a continuación. Si u es una unidad de medida tal que $AB = xu$ y $BC = yu$, y se trazan paralelas a l_1 por los puntos donde se toma cada unidad u, entonces $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ quedan divididos en segmentos de medidas iguales a u' (Figura 2.4).

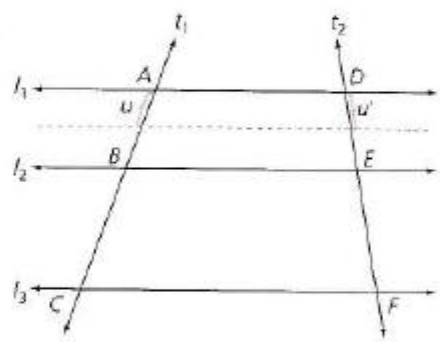


Figura 2.4

Luego: $\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu}$ y $\frac{DE}{EF} = \frac{xu'}{yu'}$ Así: $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ y $\frac{DE}{EF} = \frac{x}{y}$

Por lo tanto, por transitividad, se obtiene que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, que es equivalente a $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Ejercicios n°1

Razonamiento

1 Amanda observa que cada vez que traza las diagonales de un cuadrado, estas resultan ser perpendiculares. Ella quiere probar que esta es una propiedad de todos los cuadrados.

a. ¿Cuál es el enunciado que debe demostrar?

b. ¿Cuál es la hipótesis y cuál la tesis?

2 Realiza una construcción geométrica para cada enunciado y plantea la proposición condicional correspondiente.

a. Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

b. En todo rectángulo se tiene que las diagonales son congruentes.

c. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.

Modelación

5 Elige el contraejemplo para la afirmación dada en cada caso.

a. El cuadrado de todo número entero es un número par.

$2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $(-6)^2 = 36$

b. Todo número par es divisible entre 4.

$16 \div 4 = 4$ $10 \div 4 = 2{,}5$ $9 \div 4 = 2{,}25$

c. Ningún número primo que sea mayor que 10 termina en 9.

9 49 59

Resolución de problemas

6 Propón un contraejemplo para cada afirmación.

a. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo correspondiente congruente, entonces son congruentes.

b. Si dos triángulos tienen dos pares de lados congruentes, entonces son semejantes.

c. Dos rectángulos que tengan igual perímetro tienen igual área.

d. Todo número real es racional.

e. Todos los triángulos rectángulos son congruentes.

3 Demuestra las siguientes proposiciones por el método indirecto.

a. Si x y y son enteros positivos y xy es un número impar, entonces x y y son impares.

b. Dadas dos rectas cortadas por una secante, si dos ángulos alternos internos entre estas son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

c. a, b y c son números enteros positivos. Si $ac < bc$, entonces $a < b$.

d. Si $a \in \mathbb{N}$ y a^2 es impar, entonces a es impar.

4 Calcula la medida del segmento AB en la Figura 2.5. Supón que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$.

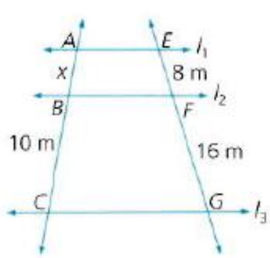


Figura 2.5

Evaluación del aprendizaje

Demuestra por los métodos directo e indirecto que "Toda paralela a un lado de un triángulo que divide a un lado en segmentos congruentes también divide al otro en segmentos congruentes". Usa la Figura 2.6.

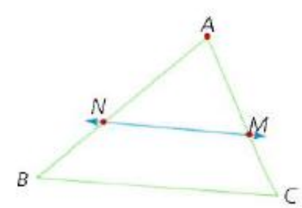


Figura 2.6

2. Segmentos proporcionales

Toma una fotografía frontal con un celular al tablero del salón. Luego**,** mide el ancho y el largo real y en la fotografía de este. Compara las medidas y escribe qué cambios observas en la foto.

Razones y proporciones

Una razón es el cociente entre dos magnitudes comparables entre sí. La razón a: b (a es a b) se escribe como $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ **con** $\boldsymbol{b \neq 0}$, por que no se puede dividir entre cero.

Cuando $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$**,** se forma una proporción, donde a y d son los **extremos** y b y c los **medios.**

Además, se cumple que el **producto de los extremos es igual al producto de los medios**, es decir, $\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$

Ejemplo 1.

Las edades de Luis (L), María (M) y Jorge suman 70 años y son proporcionales a 1, 2 y 4, respectivamente. Si k es una constante de proporcionalidad, se tiene que:

$\frac{L}{1} = \frac{M}{2} = \frac{J}{4} = K$, organizando a pares cada ecuación.

Entonces, L=k
M=2K
J=4K

Como las tres edades suman 70 años, entonces $L + M + J = 70$

Reemplazando Cada una queda:

$k + 2k + 4k = 70 \rightarrow 7k = 70$

Así, Luis tiene 10 años, María tiene 20 años y Jorge tiene 40 años.

Segmentos proporcionales

Dos segmentos son proporcionales si sus medidas forman una proporción.

Ejemplo 2

Al comparar las medidas de los segmentos correspondientes en los dos rectángulos de las figuras 2.8 y 2.9, se obtiene que $\frac{12}{18} = \frac{10}{15}$.

Como $12 \cdot 15 = 180 = 18 \cdot 10$, las medidas de los segmentos correspondientes forman una proporción; por lo tanto, los segmentos son proporcionales.

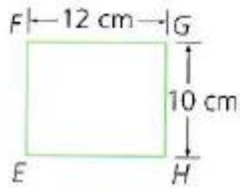


Figura 2.8

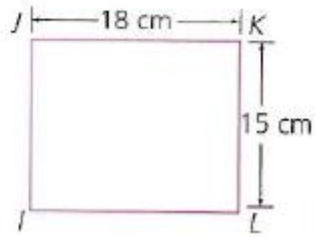


Figura 2.9

Ejercicios n°2

Ejercitación

1 Compara las medidas de los segmentos correspondientes en los triángulos de las figuras 2.10 y 2.11. Indica si los segmentos comparados son proporcionales. Justifica tus respuestas.

a.

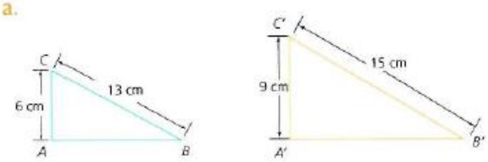


Figura 2.10

b.

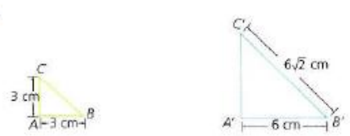


Figura 2.11

Resolución de problemas

3 Resuelve los siguientes problemas.

a. Averigua cuáles son las medidas de una hoja tamaño carta. ¿Serán los lados de un rectángulo de 3 cm por 4 cm proporcionales a los lados de una hoja de ese tamaño? ¿Si el rectángulo mide 2,1 cm por 2,97 cm ocurre lo mismo?

b. Consulta acerca de las medias de una hoja A3 y de una hoja A5 y determina si sus lados correspondientes son proporcionales.

Evaluación del aprendizaje

Si las medidas de los lados de un triángulo rectángulo que están en razón de $\frac{4}{7}$ se duplican, ¿cómo varía el perímetro original con respecto al del nuevo triángulo? Haz una representación gráfica que apoye tu respuesta.

2 Decide cuáles de las siguientes igualdades son ciertas. Explica por qué.

a. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

b. $\frac{2}{8} = \frac{14}{56}$

c. $\frac{9}{6} = \frac{36}{24}$

d. $\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

e. $\frac{3}{12} = \frac{12}{48}$

f. $\frac{5}{13} = \frac{13}{5}$

g. $\frac{1}{12} = \frac{5}{48}$

h. $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

Estilos de vida saludable

El consumo de algunas sustancias psicoactivas puede causar deformidades en tu rostro, cambios en el peso o deterioro de los hábitos de higiene.

- Mide tu rostro y dibújalo a escala. Varía la proporción de la nariz en el dibujo que hiciste y observa cómo puede cambiar tu rostro.

3. Circunferencia

Una **circunferencia** está formada por los puntos del plano que están a igual distancia de un punto llamado **centro.** Tal distancia se denomina **radio de la circunferencia.**

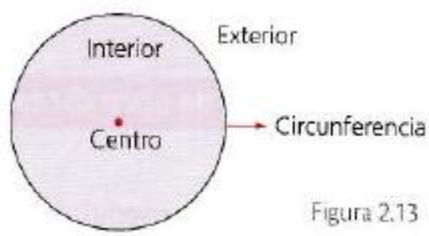
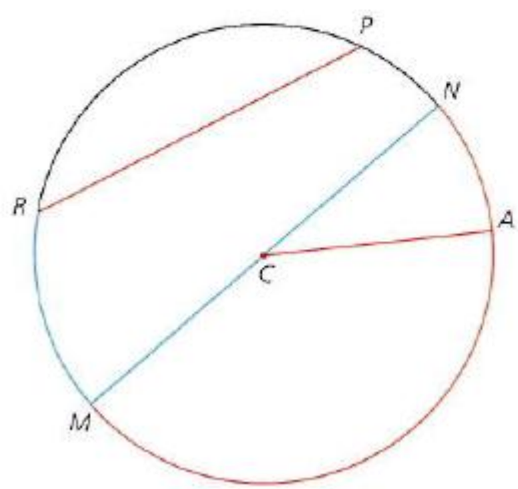


Figura 2.13

La unión de la circunferencia y su interior se denomina **círculo**.

Elementos de la circunferencia



Radio:
Cuerda:
Diámetro:
Arco:
Semicircunferencia:

Ejercicios n°3

Comunicación

1 Completa los enunciados a partir de los datos de las figuras 2.15 a 2.18.

a.

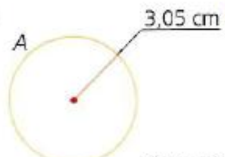


Figura 2.15

b.

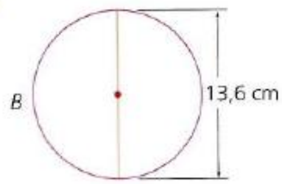


Figura 2.16

c.

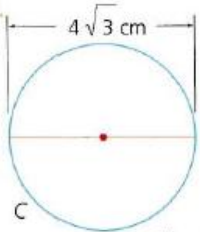


Figura 2.17

d.

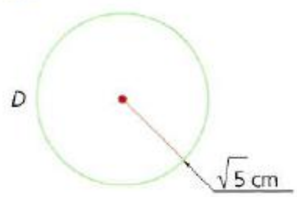


Figura 2.18

a. Si el radio de la circunferencia A mide ____, entonces la longitud del diámetro es ____.

b. Puesto que el diámetro de la circunferencia *B* es de ____ cm, su radio es de ____ cm.

c. Como el ____ de la circunferencia *C* es de $4\sqrt{3}$ cm, entonces la longitud del ____ es de $2\sqrt{3}$ cm.

d. Si el ____ de la circunferencia *D* es de $\sqrt{5}$ cm, entonces el ____ mide $2\sqrt{5}$ cm.

2 Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

a. Todas las cuerdas miden lo mismo.

b. El radio mide la mitad del diámetro.

c. Una cuerda puede ser un radio.

d. El diámetro es la mayor de todas las cuerdas posibles.

e. El círculo es la parte del plano encerrada por una circunferencia, incluyendo la propia línea de la circunferencia.

3 Explica con tus palabras la diferencia entre circunferencia y círculo.

4 Identifica cada uno de los elementos de la circunferencia de la Figura 2.19.

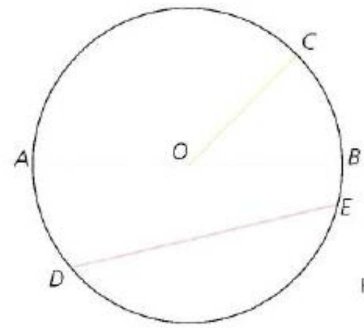


Figura 2.19

a. $\overline{OC}$ es ____.

b. ____ es un diámetro.

c. $\overline{DE}$ es ____.

d. El punto ____ es el centro de la circunferencia.

Evaluación del aprendizaje

Traza los elementos que se indican, en la circunferencia con centro en *O* (Figura 2.20).

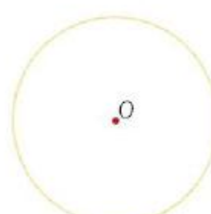


Figura 2.20

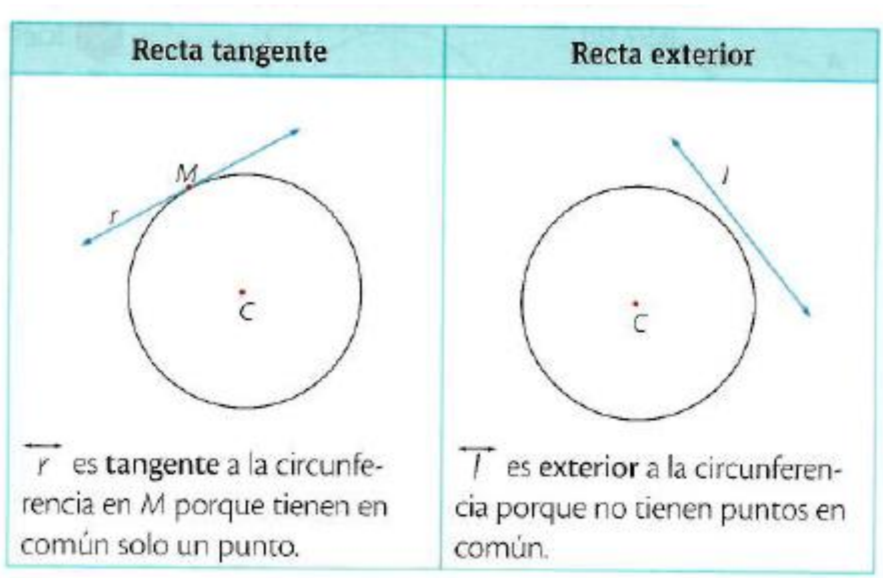
a. Un arco *AMN*.

b. Una cuerda $\overline{PQ}$.

c. Un ángulo central *BOC*.

d. Un arco *RS*.

4. Posiciones de una recta y una circunferencia



Recta tangente	Recta exterior
$\overleftrightarrow{r}$ es **tangente** a la circunferencia en M porque tienen en común solo un punto.	$\overleftrightarrow{l}$ es **exterior** a la circunferencia porque no tienen puntos en común.

Posiciones relativas de un punto y una circunferencia
Que se encuentran en un mismo plano
Interior: La distancia entre el punto A y el centro de la circunferencia es menor que la medida del radio.
Sobre la circunferencia: La distancia entre el punto B y el centro de la circunferencia es igual a la medida del radio.
Exterior: La distancia entre el punto C y el centro de la circunferencia es mayor que la medida del radio.

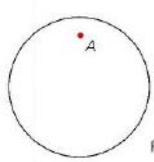


Figura 2.22

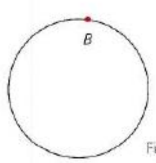


Figura 2.23

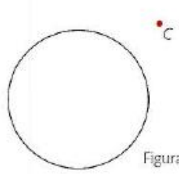
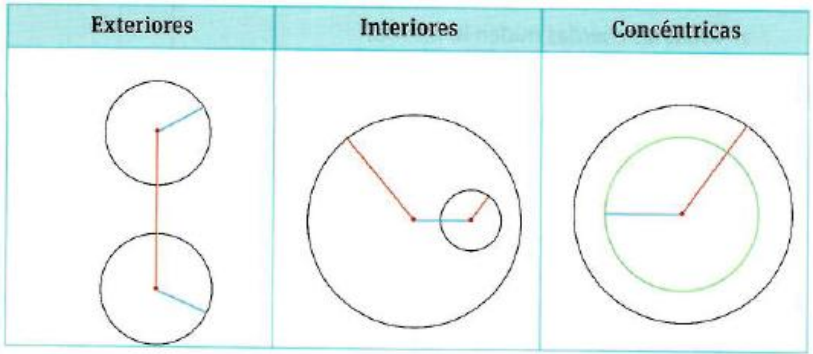


Figura 2.24

Posiciones relativas entre dos circunferencias



Propiedades de rectas tangentes a una circunferencia

Las rectas tangentes a una circunferencia cumplen las siguientes propiedades:

1. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de tangencia.
2. Si una recta es perpendicular a un radio en su extremo, entonces es tangente a la circunferencia.
3. Los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes.

Ejemplo 1

En la Figura 2.25, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son tangentes a la circunferencia; entonces se cumple que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

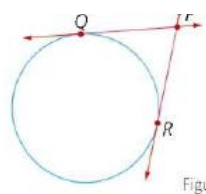


Figura 2.25

Propiedades de arcos, cuerdas y ángulos centrales

En la Figura 2.26, además del arco *MRN* y de la cuerda *PQ*, se determina $\measuredangle AOB$, cuyo vértice coincide con el centro y sus lados son radios de la circunferencia. Este es un **ángulo central**.

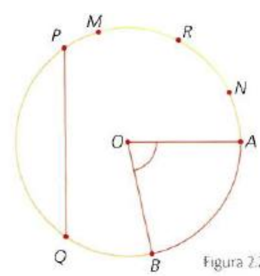


Figura 2.26

Algunas propiedades de los arcos, las cuerdas y los ángulos centrales en una circunferencia, son las siguientes:

1. Todo radio perpendicular a una cuerda biseca la cuerda y el arco correspondiente.
2. Si dos cuerdas de una misma circunferencia son congruentes, entonces las cuerdas equidistan del centro.
3. A ángulos centrales congruentes corresponden arcos congruentes.
4. La medida de un arco es la medida del ángulo central correspondiente.

Ejemplo 2

En la Figura 2.27, se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{XY}$. Como $\overline{OQ}$ es un radio y $\overline{XY}$ es una cuerda de la misma circunferencia, por la propiedad 1 de los arcos, cuerdas y ángulos centrales, se determina que $\overline{OQ}$ biseca a la cuerda $\overline{XY}$.

Por lo tanto, $XM = MY = 6$ cm.

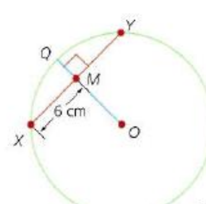


Figura 2.27

Longitud de la circunferencia.

La **longitud de una circunferencia** se obtiene multiplicando la longitud del diámetro *d* por el valor del número irracional π ($\pi \approx 3{,}1416$).

$$L = \pi d$$

Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio, entonces la longitud L de una circunferencia es $L = 2\pi r$.

Ejercicios n°4

Razonamiento

1 Calcula la medida de $\overline{OQ}$ en la Figura 2.28, si sabes que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia en P.

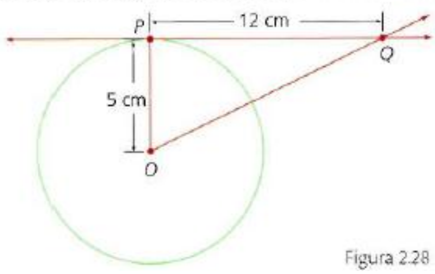


Figura 2.28

2 Encuentra el valor del radio, dada la longitud de cada circunferencia.

a.

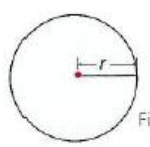


Figura 2.29

$L = 25{,}12$ cm

b.

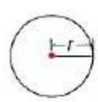


Figura 2.30

$L = 24{,}492$ cm

c.

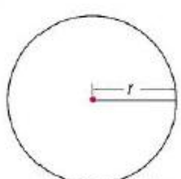


Figura 2.31

$L = 39{,}564$ cm

d.

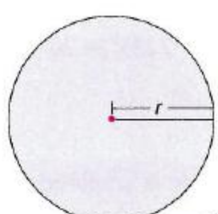


Figura 2.32

$L = 89{,}176$ cm

4 ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de la Figura 2.34? ¿Cuál es la medida del radio? ¿Cuál es la medida del diámetro?

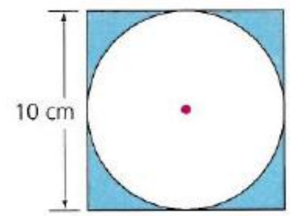


Figura 2.34

Resolución de problemas

5 Si la rueda de una bicicleta tiene 80 cm de diámetro, ¿qué distancia recorre la bicicleta en cada giro de la rueda? ¿Qué distancia recorre en seis giros?

3 Relaciona cada elemento con su medida correspondiente, teniendo en cuenta la Figura 2.33.

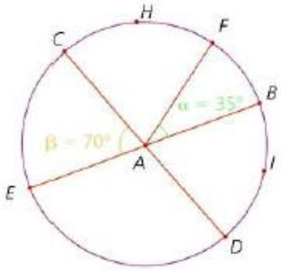


Figura 2.33

a. $\widehat{FBD}$	70°
b. $\widehat{CHB}$	75°
c. $\widehat{CED}$	105°
d. $\widehat{BID}$	180°
e. $\widehat{CEB}$	250°

Evaluación del aprendizaje

Determina la medida de $\overline{JI}$ en la Figura 2.35. Considera que $\overleftrightarrow{HJ}$ y $\overleftrightarrow{JI}$ son tangentes a la circunferencia en H y I, respectivamente.

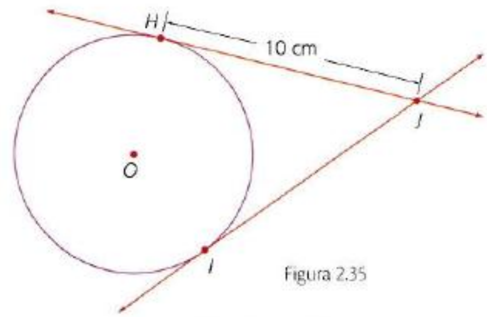


Figura 2.35