



YERMO Y PARRES
INSTITUCION EDUCATIVA



GUIA DIDACTICA PERIODO N°:3	GRUPO(S): 9º 1, 2, 3 y 4	Nº COPIAS:
MATERIA DE PROMOCION: MATEMATICAS		
NOMBRE DEL DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO		SECCION: YERMO
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:		GRUPO: 9º ----

GUIA DIDACTICA DE MATEMATICAS GRADOS 9º1, 2, 3 y 4
TERCER PERIODO
DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO

Situando las matemáticas como eje principal en la solución de problemas cotidianos, le daremos un significado diferente a los contenidos a desarrollar en este TERCER PERIODO teniendo en cuenta la situación actual que vive la humanidad y buscando que se lleve al estudiante a asociar la matemática con la tecnología para que aproveche todos los recursos en su beneficio para su propio aprendizaje.

Los temas a desarrollar en este periodo en matemáticas, están relacionados con LAS FUNCIONES CUADRATICAS Y SUS GRAFICAS, ASI COMO TAMBIEN, EL METODO DE SOLUCION DE UNA ECUACION CUADRATICA POR FORMULA GENERAL HACIENDO USO DEL DISCRIMINANTE. Mientras que en el campo geométrico estudiaremos AREAS Y VOLUMERNES DE CUERPOS GEOMETRICOS: PRISMAS, PIRAMIDES, CILINDROS, CONOS Y ESFERAS, con los cuales espero se conlleve al estudiante a la solución de problemas guiados con la utilización de herramientas tecnológicas y el aprovechamiento de la informática.

Esta guía didáctica será desarrollada paso a paso en cada una de las clases programadas y los estudiantes que tienen alguna limitante o incapacidad médica para estar en la presencialidad, la trabajaran desde casa de acuerdo con las orientaciones dadas por los coordinadores y por el concejo académico de la institución.

Se espera el compromiso directo de los estudiantes y padres de familia para acompañar a sus hijos en su aprendizaje para que este sea efectivo y responsable creando entre todos valores de responsabilidad, honestidad y compromiso con su propia formación aprendizaje, el cual dependerá en gran medida del acompañamiento brindado desde el hogar.

1

Función cuadrática. Representación gráfica

Saberes previos

Describe cómo es el salto de un conejo o el lanzamiento de un balón de baloncesto dirigido hacia la cesta. ¿Qué otros movimientos conoces que sean similares a estos?

Analiza

El salto de cierta rana se puede modelar mediante la función:

$$h(t) = 2t - t^2$$

Donde t es el tiempo medido en segundos y h la altura en metros.

- ¿Cuánto tardará el salto de la rana? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana en ese salto?

Conoce

En la Tabla 6.1 se muestra la altura del salto de la rana en cinco momentos distintos.

t	0	0,5	1	1,5	2
$h(t)$	0	0,75	1	0,75	0

Tabla 6.1

Según los datos, la rana está en el piso cuando $t = 0$ y $t = 2$; pues su altura es 0 en ambos instantes. Es decir, $h(0) = 0$ y $h(2) = 0$. El instante $t = 0$ corresponde al momento de iniciar el salto, y el instante $t = 2$ corresponderá al instante en que la rana vuelve al piso después de haber saltado. Esto significa que el salto tarda dos segundos.

Por otra parte, la máxima altura que alcanza la rana corresponde al mayor valor de $h(t)$ registrado en la tabla: 1. Por esto se deduce que la mayor altura que alcanza la rana en este salto es de 1 m.

Muchas situaciones son modeladas mediante funciones que involucran el cuadrado de una variable. Este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas**.

Una **función cuadrática** es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$.

1.1 Representación gráfica de una función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se caracteriza por tener los siguientes elementos.

- **Vértice (V):** punto donde la parábola alcanza su punto máximo, si $a < 0$, o su punto mínimo, si $a > 0$.
- **Cortes de la parábola con los ejes coordenados (ceros de la función):** puntos donde el valor de la función es 0. Las coordenadas de los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. En estos casos, el valor de x se halla resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Eje de simetría:** recta paralela al eje Y , que pasa por la coordenada x del vértice de la parábola.
- **Concavidad:** una parábola es cóncava hacia arriba, si $a > 0$, o es cóncava hacia abajo, si $a < 0$.

x	$f(x)$
-4	-10
-2	-4
0	-2
2	-4
4	-10

Tabla 6.2

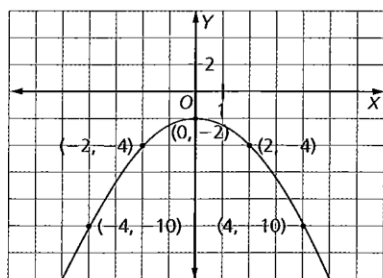


Figura 6.1

Ejemplo 1

Para representar gráficamente la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$, se puede completar una tabla de valores como la Tabla 6.2, asignando valores arbitrarios a la variable x . Luego, se representan en el plano cartesiano. Como la función está definida para cualquier valor real, al trazar la curva se obtiene la Figura 6.1.

1.2 Funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Una función definida por la expresión $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se conoce como **función cuadrática con vértice en el origen**.

El vértice de la parábola que describe la función $f(x) = ax^2$ es $(0, 0)$; el eje de simetría de esta parábola es el eje Y.

Ejemplo 2

Se puede determinar la variación de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, analizando el resultado para los distintos valores de a .

- Si $a > 1$, la gráfica de la función es una contracción de la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función es una dilatación de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

En la Tabla 6.3, las parábolas representadas son $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y

$h(x) = 4x^2$ para $a > 1$; y $f(x) = x^2$, $g(x) = 0,5x^2$ y $h(x) = 0,33x^2$ para $0 < a < 1$.

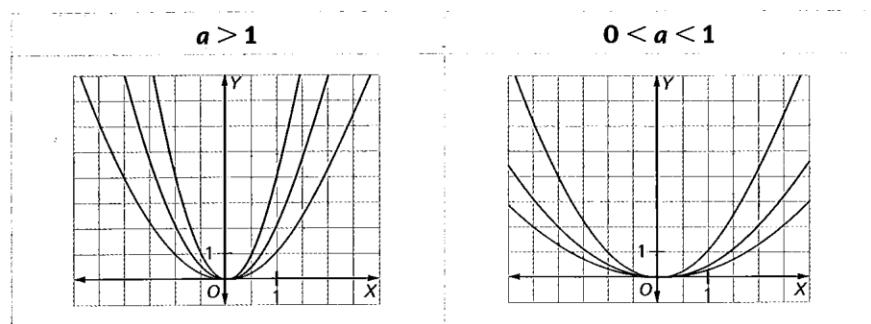


Tabla 6.3

- Cuando $a < 0$, las gráficas de las funciones se obtienen reflejando las gráficas de los casos anteriores con respecto al eje X, como se ve en la Tabla 6.4.

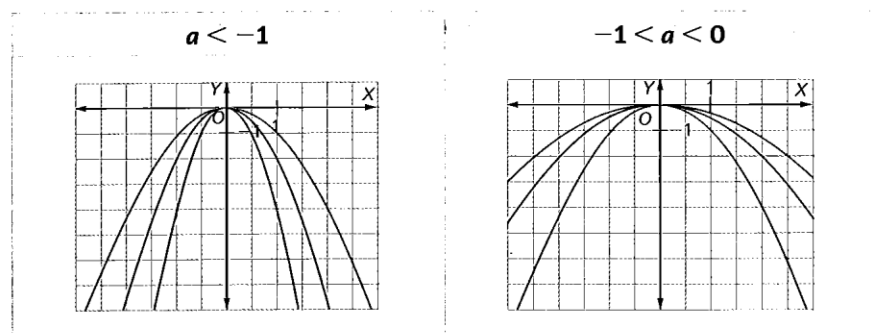


Tabla 6.4

1.3 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$

La parábola que describe la función $f(x) = ax^2 + c$ es una traslación vertical de c unidades de la parábola $f(x) = ax^2$. Esta traslación es hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

El vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + c$ está ubicado en el punto $(0, c)$ y el eje de simetría es el eje Y.

1

Función cuadrática. Representación gráfica

1.4 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática en la cual a , b y c son diferentes de 0.

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede llevarse a una de las formas:

$$f(x) = a(x - h)^2 \text{ o } f(x) = a(x - h)^2 + k$$

- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, el vértice de la parábola es el punto $(h, 0)$ y el eje de simetría es el eje Y .
- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el punto (h, k) y el eje de simetría es la recta $x = h$.

Ejemplo 3

La función $g(x) = x^2 - 6x + 9$ se puede expresar como $g(x) = (x - 3)^2$, por lo tanto, su vértice es $(3, 0)$. Además, su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, tres unidades a la derecha.

Ejemplo 4

La función $h(x) = x^2 + 4x + 4$ se puede expresar como $g(x) = (x + 2)^2$, por lo tanto, su vértice es $(-2, 0)$. Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, dos unidades a la izquierda (Figura 6.2).

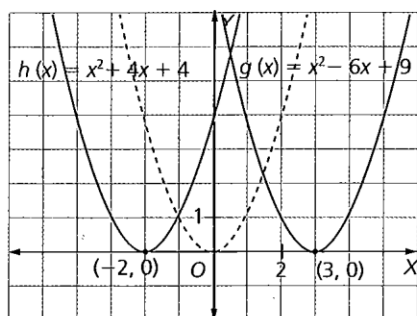


Figura 6.2

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden representar una función cuadrática.

- $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$
- $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$
- $f(n) = -0,25n^2 - 0,5n + 1$
- $f(x) = -6x + 1$
- $f(t) = -4t - 5 + 32t^2$

Razonamiento

- 2 Escribe cada una de las siguientes funciones en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego, identifica los valores correspondientes de a , b y c .

- $f(x) = 4x + 10 - 16x^2$
- $f(x) = -6x + 5 + x^2$
- $f(x) = x^2 + 10 - 6x$
- $f(x) = -2 + x^2 - 4x$

Comunicación

- 3 Escribe la ecuación del eje de simetría de cada parábola y las coordenadas del vértice.

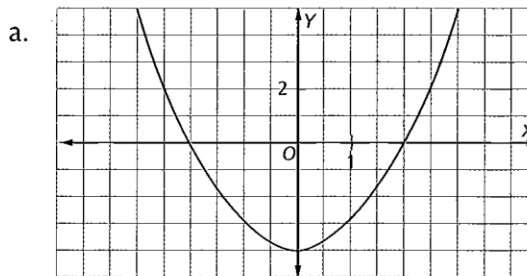


Figura 6.3

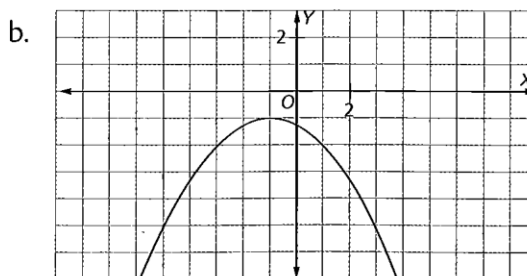


Figura 6.4

Comunicación

- 4 Elabora las gráficas de las funciones cuadráticas de cada grupo en un mismo plano cartesiano. Explica sus diferencias y semejanzas.

- a. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = -2x^2$
 b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $g(x) = 2x^2$
 c. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 3x^2$ $h(x) = 4x^2$
 d. $f(x) = -2x^2$ $g(x) = -3x^2$ $h(x) = -4x^2$

- 5 Determina la ecuación de la función cuadrática que define cada tabla de valores.

a.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

Tabla 6.5

b.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Tabla 6.6

- 6 Lleva cada función a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
 Luego, escribe las coordenadas del vértice de la parábola que la representa.

- a. $f(x) = x^2 + 2x + 3$
 b. $f(x) = x^2 - 2x + 5$
 c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

Resolución de problemas

- 7 El movimiento de una pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros.

- a. Representa gráficamente la función $f(x)$.
 b. ¿Qué significa que la gráfica tenga un punto máximo o mínimo?
 c. ¿Qué altura alcanza la pelota al transcurrir dos segundos desde el inicio del movimiento?

- 8 El movimiento de cierta partícula está determinado por la función $f(x) = x^2 - 4$. Su trayectoria se muestra en la Figura 6.5.

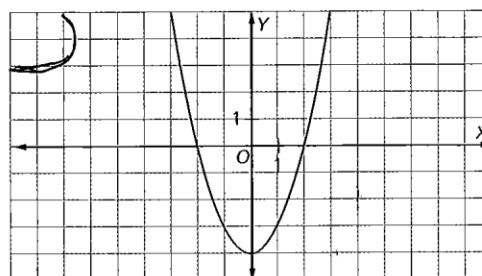


Figura 6.5

- a. ¿Qué coordenadas tiene el punto más bajo que alcanza la partícula?
 b. ¿En qué puntos la trayectoria corta a los ejes?

Evaluación del aprendizaje

- i Observa la Figura 6.6. ¿Qué tipo de transformación sufrió la parábola a para obtener la parábola b ? Determina las funciones que las describen.

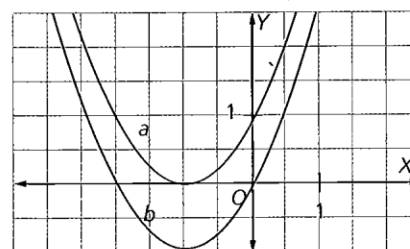


Figura 6.6

- ii La trayectoria de cierto satélite se ajusta a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 - 12$, donde x representa el tiempo en días y $f(x)$ el recorrido en kilómetros. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido el satélite al cabo de diez días desde su lanzamiento?

Educación ambiental

El nivel y de contaminación de un río está dado por la función $y = -8x^2 - 16$, donde x representa el tiempo medido en horas. ¿A qué hora del día el río se encuentra más contaminado?

- ¿Qué acciones puedes tomar para evitar que se sigan contaminando los ríos?

2

Obtención de los ceros de una función cuadrática

Saberes previos

Representa gráficamente la función $y = 3x^2 - 3$. ¿Cuáles son los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

Analiza

Una compañía de alimentos diseña una caja para empacar sus productos con un volumen igual a 72 dm^3 . Sus dimensiones están representadas en la Figura 6.7.

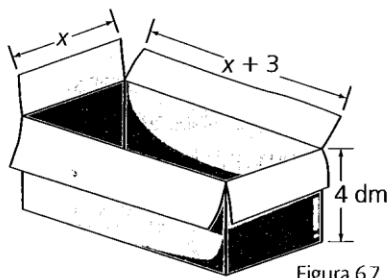


Figura 6.7

- Encuentra las dimensiones de la caja en decímetros.

Conoce

El volumen $V(x)$ de una caja se halla multiplicando sus tres dimensiones, entonces para la situación $V(x) = 4x^2 + 12x - 72$.

Para hallar las dimensiones de la caja es necesario determinar los ceros de la función cuadrática $V(x)$ que corresponden a los valores de x para los cuales $4x^2 + 12x - 72 = 0$. Como en este caso no es práctico recurrir a la factorización, se utiliza la **fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas**, así:

En la ecuación $4x^2 + 12x - 72 = 0$, $a = 4$, $b = 12$ y $c = -72$, por lo tanto:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -6$$

Al considerar las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es $x = 3$, de modo que las dimensiones de la caja son: 3 dm, 6 dm y 4 dm.

La **fórmula general para encontrar los ceros de una función cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$** , con a , b y c números reales, es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplica la fórmula general para hallar los ceros de la función asociada a la ecuación $x^2 - 2x - 960 = 0$.

Como $a = 1$, $b = -2$ y $c = -960$, entonces:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-960)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3840}}{2} = \frac{2 \pm 62}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + 62}{2} = 32 \text{ y } x_2 = \frac{2 - 62}{2} = -30$$

2.1 Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante**. Es el valor que determina el tipo de ceros de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c números reales, se consideran los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 2

Observa cómo se determina el tipo de soluciones de las ecuaciones cuadráticas $x^2 + 6x + 9 = 0$, $3x^2 + 5x + 6 = 0$ y $2x^2 + 5x - 3 = 0$, analizando su discriminante.

- El discriminante de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real.

- El discriminante de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$$

Como $49 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.

- El discriminante de la ecuación $3x^2 + 5x + 6 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$$

Como $-47 < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 3x - 10 = 0$

b. $x^2 - 3x - 4 = 0$

c. $-x^2 + 4x - 2 = 0$

d. $-2x^2 - x = -6$

e. $(x + 2)^2 + 1 = 0$

f. $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g. $-0,5x^2 + 2x + 1,5 = 0$

h. $1,5x^2 + 2x = 0$

i. $(x + 2)(x - 3) = 6$

j. $(x + 1)(x - 5) = 16$

Razonamiento

- 2 Determina el tipo de raíces que tiene cada ecuación estudiando su discriminante. Luego, resuelve aquellas que tengan solución o soluciones reales.

a. $8x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $x(2x - 3) = 20$

c. $6x^2 + x + 2 = 0$

d. $x - 2x^2 = 8$

e. $2x^2 + x - 2 = 0$

f. $-3x^2 - x + 1 = 0$

Resolución de problemas

- 3 El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. ¿Cuál es el área original de la sala?
- 4 Un número entero es tal que el cuadrado del antecesor de su doble es equivalente al cuadrado del número aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Examina la Figura 6.8 y determina la ecuación cuadrática asociada a la parábola. ¿Cuáles son los ceros de la función?

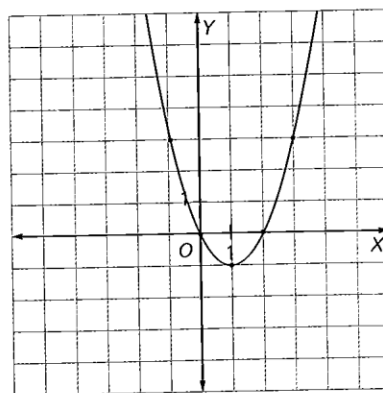


Figura 6.8

7 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Saberes previos

Un galón de pintura alcanza para pintar 10 m^2 y se deben pintar dos paredes que miden $3,5 \text{ m}$ de largo y $2,7 \text{ m}$ de alto y $5,25 \text{ m}$ de largo y $1,8 \text{ m}$ de alto, respectivamente. ¿Cuál pared tiene una mayor superficie? ¿Alcanzará el galón de pintura para cubrir ambas superficies?

Analiza

En una fábrica de chocolates se empaican los productos en cajas cuya forma es un prisma trapezoidal, como se ve en la Figura 3.52.

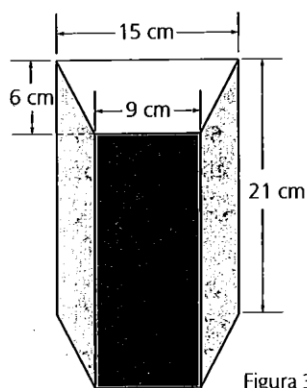


Figura 3.52

- Si se empaican chocolates de 7 cm^3 de volumen, ¿cuántas unidades caben en la caja?

Conoce

7.1 Área y volumen de prismas

Para resolver el problema es importante recordar que un **prisma** es un sólido conformado por dos polígonos paralelos congruentes, que se denominan bases, y por tantos paralelogramos como lados tengan las bases. En la Figura 3.54 se observa que las bases de las cajas son trapecios, por lo tanto:

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{15 + 9}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

El volumen del prisma es $V = A_{\text{trapecio}} \cdot h \Rightarrow V = 72 \text{ cm}^2 \cdot 21 \text{ cm} = 1512 \text{ cm}^3$.

Como cada chocolate tiene un volumen de 7 cm^3 , entonces en la caja caben $1512 \div 7 = 216$ chocolates.

El **área total** de un prisma es la suma entre el área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si en un prisma, P_B es el perímetro de la base A_B el área de la base y h la altura, entonces el área total, A_T , y el volumen, V , son respectivamente:

$$A_T = P_B h + 2A_B \quad V = A_B h$$

Ejemplo 1

Para calcular el área total y el volumen del prisma triangular de la Figura 3.53, cuya base es un triángulo isósceles, se realiza lo siguiente:

- Se calcula la altura del triángulo isósceles de la base.

$$h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

- Se calcula el perímetro y el área de la base.

$$P_B = 10 \text{ cm} \text{ y } A_B = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el área total A_T es:

$$A_T = 10 \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4(20 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

- Así, el volumen es: $V = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5} \text{ cm}^3$.

7.2 Área y volumen de pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y por caras, que son triángulos coincidentes en un vértice común.

El **área total** de una pirámide es la suma del área de las caras laterales y el área de la base. El **volumen** de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.

Si en una pirámide, A_L es el área lateral, A_B el área de la base y h la altura, entonces el área total, A_T , y el volumen, V , son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \quad V = \frac{A_B h}{3}$$

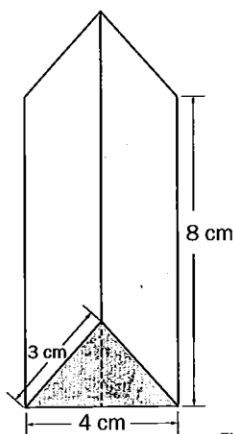


Figura 3.53

Ejemplo 2

El área total y el volumen de la pirámide cuadrangular de la Figura 3.54 cuya altura es 7,23 cm, se calculan así:

$$A_T = 4 \cdot \frac{4 \cdot 7,5}{2} + 16 = 76 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{16 \cdot 7,23}{3} = 38,56 \text{ cm}^3$$

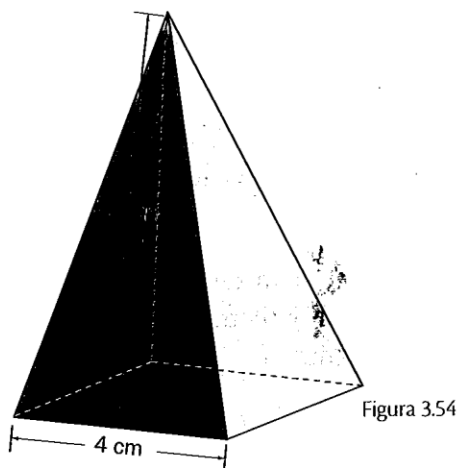


Figura 3.54

7.3 Área y volumen de cilindros

Un cilindro es un sólido limitado por dos bases circulares y una cara curva. Se obtiene cuando un rectángulo rota una vuelta entera alrededor de uno de sus lados. En la Figura 3.55 se observa un cilindro de altura h y radio de la base r .

El área total de un cilindro recto es la suma del área lateral y el área de las dos bases. El volumen corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si A_L es el área lateral de un cilindro recto, A_B es el área de la base, h es la altura y r es el radio de la base, entonces el área total, A_T , y el volumen, V , se calculan respectivamente como:

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2A_B & V &= A_B h \\ A_T &= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) & V &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

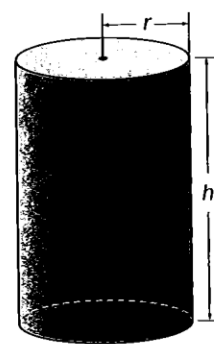


Figura 3.55

Ejemplo 3

Para calcular el área total y el volumen del cilindro de la Figura 3.56, se aplican las fórmulas anteriores.

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r(h + r) \\ &= 2\pi \cdot 3 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) \\ &= 6\pi \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} \\ &= 78\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} \\ &= \pi \cdot 9 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} \\ &= 90\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

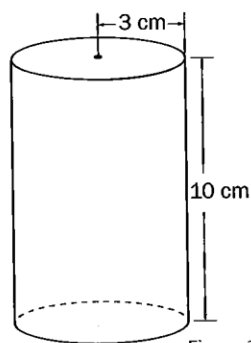


Figura 3.56

Por lo tanto, el cilindro tiene $78\pi \text{ cm}^2$ de área total y $90\pi \text{ cm}^3$ de volumen.

7 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

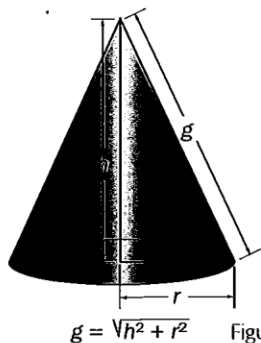


Figura 3.57

7.4 Área y volumen de conos

Un cono, como el de la Figura 3.57, es un sólido limitado por una base circular y una cara curva. Se obtiene al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El área total del cono es la suma del área lateral con el área de la base. El volumen del cono es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura.

Si A_L es el área lateral de un cono de altura h , A_B es el área de la base de radio r y g , la generatriz, entonces el área total, A_T , y el volumen, V , del cono son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \qquad V = \frac{A_B h}{3}$$

$$A_T = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r) \qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ejemplo 4

Para determinar el área total y el volumen de un cono de altura 12 cm y cuyo diámetro de la base mide 5 cm, es necesario, en primer lugar, calcular la generatriz g del cono utilizando el teorema de Pitágoras.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + (2,5)^2} = 12,26 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

$$A_T = \pi \cdot 2,5 \cdot (12,26 + 2,5) = 36,9\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (2,5)^2 \cdot 12}{3} = 25\pi \text{ cm}^3$$

Ejemplo 5

La Figura 3.58 está compuesta por un cilindro y un cono. Por lo tanto, para determinar el área total se suman el área lateral del cono, el área lateral del cilindro y el área de una de sus bases.

Por el teorema de Pitágoras, la generatriz del cono está dada por:

$$g = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

De modo que:

$$A_T = \overbrace{(\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2)}^{A_L \text{ Cono}} + \overbrace{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6}^{A_L \text{ Cilindro}} + \overbrace{\pi \cdot 2^2}^{A_B}$$

$$= 4\pi(7 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

El volumen del sólido es la suma de los volúmenes del cono y del cilindro.

$$V_{\text{sólido}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = \frac{88\pi}{3} \text{ cm}^3$$

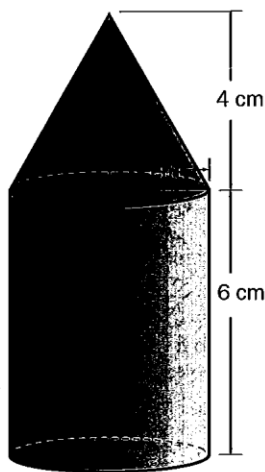


Figura 3.58

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Calcula el área total y el volumen del prisma cuya base es un hexágono regular (Figura 3.59).

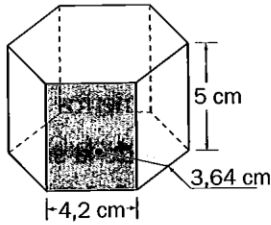


Figura 3.59

- 2 Determina el volumen del sólido de la figura.

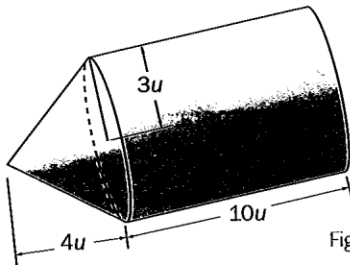


Figura 3.60

- 3 Halla el área total y el volumen del ortoedro presentado en la figura.

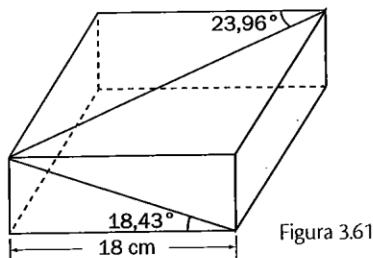


Figura 3.61

- 4 ¿Cuál es el espacio ocupado por las pirámides de las figuras si sus bases son polígonos regulares?

a.

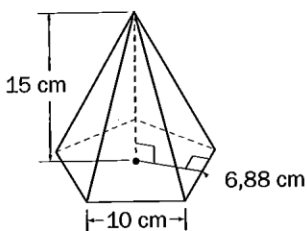


Figura 3.62

b.

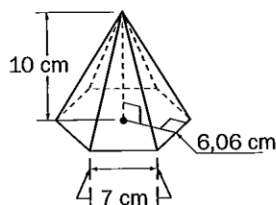


Figura 3.63

Resolución de problemas

- 5 ¿Cuánto papel de regalo se necesita para envolver una caja de 9,5 cm de ancho, 2 cm de largo y 3 cm de profundidad?

- 6 ¿Cuánto metal se requiere para fabricar una lata cilíndrica como la de la Figura 3.64?

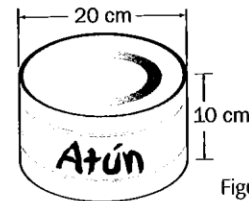


Figura 3.64

Evaluación del aprendizaje

- i ¿Cuáles son el área total y el volumen del sólido de la Figura 3.65?

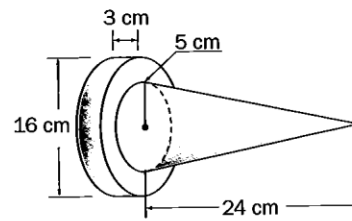


Figura 3.65

- ii Asigna medidas a las figuras e inventa un problema donde se pida calcular el área total y el volumen de cada una.

a.



Figura 3.66

b.

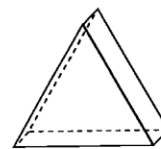


Figura 3.67

c.

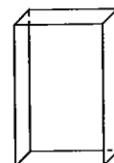


Figura 3.68

d.

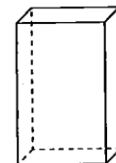


Figura 3.69

Educación ambiental

Halla en tu casa el volumen de dos recipientes en los que puedas almacenar agua. Si sabes que $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$, ¿cuál de los dos recipientes podrías utilizar si quisieras recoger agua para reutilizar en el inodoro? ¿Cómo crees que ayuda al medio ambiente la reutilización del agua?

8 Área y volumen de la esfera

Saberes previos

¿Por qué no es posible medir el volumen de un círculo?

Analiza

El diámetro ecuatorial del planeta Tierra es de 12756 km aproximadamente.



- ¿Cuáles son el área superficial y el volumen de la Tierra?

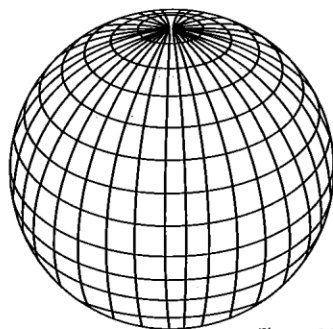


Figura 3.70



Figura 3.71

Conoce

Para calcular los valores sobre los cuales se pregunta, es necesario considerar la Tierra como una esfera.

Una **esfera** es el conjunto de puntos del espacio que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo conocido como centro. La esfera se obtiene al girar una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros (Figura 3.70).

Además, se debe tener en cuenta que el **área de la superficie de una esfera** es igual a cuatro veces el área del círculo máximo, que contiene el centro de la esfera y tiene su mismo radio r , y que su **volumen** equivale a cuatro tercios del producto de π por el cubo de su radio.

Según lo anterior, para hallar el área y el volumen de la Tierra se comienza calculando su radio, que es de 6378 km. Así, su área superficial estará dada por:

$$A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 6378^2 = 162\,715\,536\pi \text{ km}^2$$

El volumen se determina de la siguiente manera:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 6378^3 = 345\,933\,229\,536\pi \text{ km}^3$$

Para una esfera de radio r , el área, A_{Esfera} , y el volumen, V_{Esfera} , son respectivamente:

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \quad V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ejemplo 1

El área superficial y el volumen de un balón de baloncesto cuyo diámetro mide 24 cm, se calculan de la siguiente manera:

$$A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 2\,304\pi \text{ cm}^3$$

El plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos regiones llamadas **semiesferas**. El **área superficial** y el **volumen de la semiesfera** corresponden a la mitad del área superficial y a la mitad del volumen de la esfera.

Para una semiesfera de radio r , el área, $A_{\text{Semiesfera}}$, y el volumen, $V_{\text{Semiesfera}}$, son respectivamente:

$$A_{\text{Semiesfera}} = 2\pi r^2 \quad V_{\text{Semiesfera}} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Ejemplo 2

La cúpula de la Figura 3.71 es una semiesfera cuyo diámetro es 50 m.

El área superficial de la cúpula se calcula de la siguiente manera:

$$A_{\text{Semiesfera}} = 2 \cdot \pi \cdot 25^2 = 1250\pi \text{ m}^2$$

El volumen de la semiesfera se calcula así:

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 = \frac{31\,250}{3} \pi \text{ m}^3$$

Ejemplo 3

El volumen del cubo de la Figura 3.72 es $17\,576 \text{ mm}^3$; entonces, su lado mide 26 mm. Como la esfera está inscrita en el cubo, su radio mide 13 mm.

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 13^3 = \frac{8\,788}{3} \pi \text{ mm}^3$$

El volumen comprendido entre el cubo y la esfera es:

$$\begin{array}{c} \text{Volumen del cubo} \\ \downarrow \\ 17\,576 \text{ mm}^3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Volumen de la esfera} \\ \downarrow \\ \frac{8\,788}{3} \pi \text{ mm}^3 \end{array} = 43\,940 \frac{\pi}{3} \text{ mm}^3$$

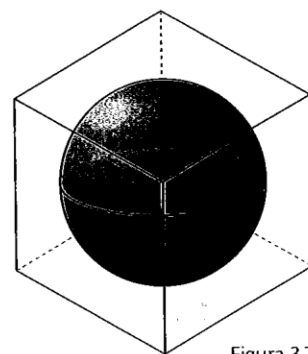


Figura 3.72

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- 1 Halla el área superficial y el volumen de cada sólido.
 - a. Una esfera de diámetro 15 dm
 - b. Una esfera de diámetro 8 cm
 - c. Una esfera inscrita en un cubo de 6 dm de lado
 - d. Una semiesfera de diámetro 32 m

Comunicación

- 2 Calcula el área superficial y el volumen de la esfera.

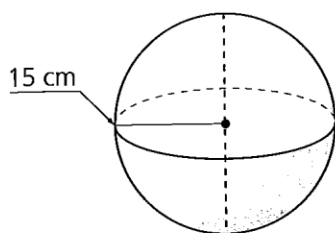


Figura 3.73

Razonamiento

- 3 Encuentra el radio de una esfera cuya área es igual a la suma de las áreas de cuatro esferas de radio 5 cm.
- 4 Discute con alguno de tus compañeros la veracidad de la siguiente afirmación: "El volumen de la esfera es cuatro veces el volumen de un cono cuya altura y radio tienen la misma longitud que el radio de la esfera".

- 5 Las siguientes figuras (la esfera y el cono) tienen el mismo volumen.

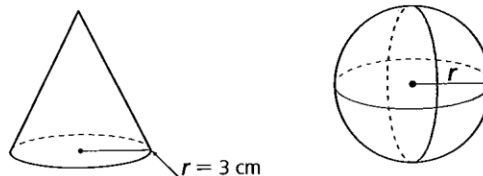


Figura 3.74

¿Cuál debe ser la altura del cono para que su base y el círculo máximo de la esfera sean iguales?

Evaluación del aprendizaje

- i En una caja en forma de prisma rectangular, de dimensiones 12 cm, 18 cm y 24 cm, se empaquetan bolas de cristal de 6 cm de radio.

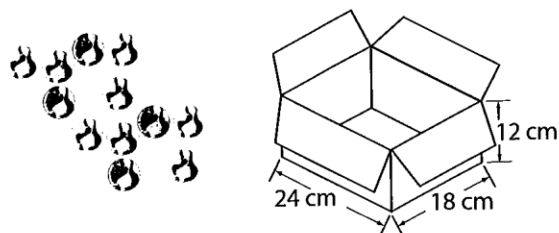


Figura 3.75

¿Cuántas bolas caben en la caja?

- ii Para hacer un arreglo navideño se van a forrar, en tela, bolas de icopor de 4 cm de radio. ¿Qué cantidad de tela se debe comprar como mínimo?