



UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS – TERCER PERIODO- GRADO 11°

TEMAS:

Simetría.

Funciones polinómicas.

Funciones racionales.

Funciones exponenciales y logarítmicas.

Funciones definidas a trozos.

Funciones valor absoluto y parte entera.

Operación con funciones.

Funciones inversas.

Funciones periódicas.

Sistema de coordenadas polares.

Operación con funciones

Conocimientos previos:

Conjuntos numéricos, números reales y la recta real, desigualdades, intervalos, inecuaciones, valor absoluto, solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, factorización, función, dominio, rango, representación gráfica en el plano cartesiano.

**Serán trabajados en un tiempo de nueve semanas. Trabajados así:
Temas serán trabajados por sesiones, una sesión con un tiempo de 5 horas por semana.**

[file:///C:/Users/Martha/Downloads/Libro.Pre_Calculo - James Stewart%20\(8\).pdf](file:///C:/Users/Martha/Downloads/Libro.Pre_Calculo_-_James_Stewart%20(8).pdf), Este será el libro guía para estos temas.

<https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf>

Usaremos ese libro para resolver los talleres y revisar la teoría. Texto del ministerio de educación.

Algunos ejemplos fueron tomados de la siguiente página, en ella encontraras más ejemplos y temas para complementar.



http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primerio_ciencias_sociales/funciones/ind_funciones.html

OBJETIVOS:

Reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática y su utilización para modelar situaciones de la vida diaria.

Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas de las gráficas de algunas funciones.

Reconocer las propiedades de diferentes tipos de funciones

Realizar operaciones entre funciones y construir gráficas.

Interpretar el comportamiento de las sucesiones y de las funciones de manera analítica.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

Se tiene en cuenta los temas trabajados en el primer y segundo periodo, que son aplicados en todos los temas de esta unidad, también los temas de años anteriores como son: factorización, operaciones entre los números reales como suma, diferencia, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Para tener una comprensión de los temas se desarrollarán las explicaciones pertinentes y se apoyará en talleres para una ejercitación de las temáticas. Se complementan con videos los cuales serán una manera de complementar las explicaciones.

Simetría

Una función es **simétrica respecto al eje y** si se cumple que:

$f(-x) = f(x)$ una función que representa este tipo de simetría se denomina **función par**.

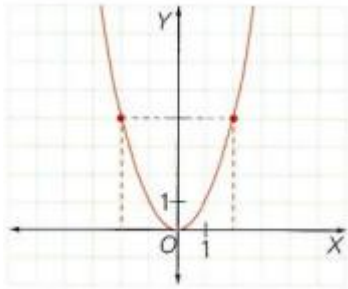
Ejemplo 1.

La función $f(x) = x^2$ es par.

Analíticamente lo podemos comprobar por que cumple

$$f(-x) = (-x)^2$$

Es $f(x) = x^2$ ambas son iguales.



Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas**

si se cumple que:

$$f(-x) = -f(x):$$

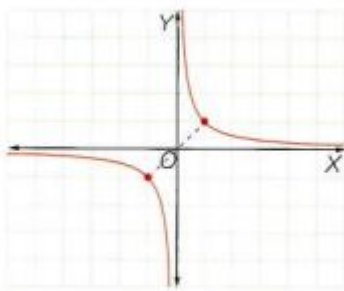
Una función que representa este tipo de simetría se denomina **función impar**.

Ejemplo 2.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ **es impar**.

$$\text{Ya que } f(-x) = \frac{1}{-x}$$

$$\text{Que es lo mismo que } -f(x) = -\frac{1}{x}$$



Taller N°1: Tema simetría

**Actividades de aprendizaje****Modelación**

- 1 Completa la gráfica de cada función, considerando que esta es impar.

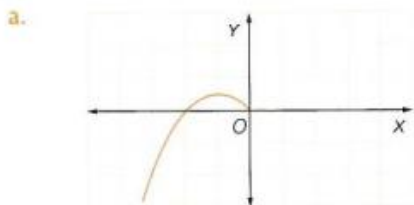


Figura 2.14

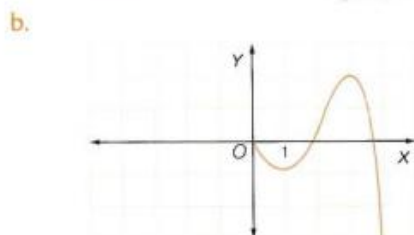


Figura 2.15

- 2 Para cada caso, grafica una función que cumpla las características dadas.

- a. f tiene simetría par, $f(2) = -5$, $f(-4) = 1$, y su dominio es el conjunto de los números reales.
- b. g tiene simetría impar, $g(2) = -5$, $g(-4) = 1$, y su dominio es $[-10, 10]$.
- c. h no tiene simetría par ni impar, $h(1) = 0$, $h(-2) = 3$ y $D(h) = [-12, 5]$.

Razonamiento

- 3 Resuelve lo que se indica en cada caso.

- ◆ a. Determina si la función $x^n + x^m$, donde n y m son números pares, es par, impar o no presenta ninguna de estas simetrías.

- b. Haz lo mismo para una función $x^n + x^m$ con sus exponentes impares.
- c. Si para la función $x^n + x^m$, m es par y n es impar, ¿qué tipo de simetría presenta la función?
- d. ¿Por qué crees que se utilizan los términos *función par* y *función impar*?

- 4 Analiza y responde.

- ◆ ¿Por qué para las funciones no se estudia la simetría con respecto al eje X ?

Ejercitación

- 5 Determina si las siguientes funciones son pares o impares, o si no presentan ninguna de estas simetrías.

a. $f(x) = \frac{1}{|x^2 + 1|}$

b. $f(x) = x(x - 1) \cdot (x + 1)$

c. $f(x) = x^2 - 3x$

d. $f(x) = x^4 - x^3 + x - 7$

e. $f(x) = \sqrt{x}$

f. $f(x) = x^2(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$

g. $f(x) = \frac{x^4 + x}{2x + 1}$

h. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

i. $f(x) = |x|$

j. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

k. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Resolución de problemas

- 6 Una piscina tarda tres horas en llenarse si se abren sus cinco grifos.

- a. Escribe la función que relaciona el número de grifos, x , con el tiempo, y , que se emplea para llenar la piscina.
- b. Representa la función obtenida.
- c. ¿La función es par o impar?

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Lee, analiza y responde.

- ★ a. Si el punto (m, n) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto está también sobre la gráfica y es determinado a partir (m, n) ?
- b. Si el punto (m, n) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto está también sobre la gráfica y es determinado a partir de (m, n) ?



Funciones polinómicas

La gráfica de $f(x) = c$ es una recta paralela al eje X ; la gráfica de $g(x) = mx + b$ es una recta de pendiente m ; y, $h(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que abre hacia arriba, si $a > 0$, o abre hacia abajo, si $a < 0$.

Las funciones f , g y h se denominan **función constante**, **función afín** y **función cuadrática**, respectivamente; sin embargo, todas ellas son ejemplos de **funciones polinómicas**. Las funciones $f(x) = 2$, $g(x) = -x + 1$ y $h(x) = 2x^2 - 3$ son polinómicas.

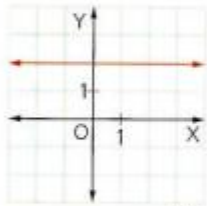


Figura 2.16

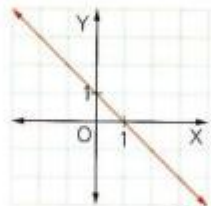


Figura 2.17

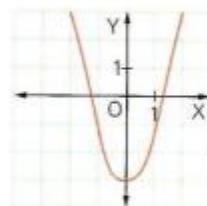


Figura 2.18

La función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$ y los exponentes de x son enteros positivos, se denomina **función polinómica de grado n** . Las constantes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1, a_0$ se denominan **coeficientes** y a_0 se denomina **término independiente**. El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales.

Para trazar un bosquejo de la gráfica de una función polinómica,

Se deben hallar los cortes y los signos de la función.

Ejemplo 1.

La función $f(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2$

Para los puntos de corte con el eje x , se debe factorizar

$$x^2(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Hay cuatro puntos de corte con el eje x : $(0,0)$, $(-3,0)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Para los puntos de corte con el eje y :

$(0,0)$, ya que $f(0) = 0$

Signo de la función:

Se obtiene a partir de la expresión factorizada $x^2(x + 3)(x + 1)(x - 1)$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x + 3)$	—	+	+	+
$(x + 1)$	—	—	+	+
$(x - 1)$	—	—	—	+
$f(x)$	—	+	—	+

Características de las funciones polinómicas de la forma $f(x) = x^n$

- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número par, es $[0, +\infty)$.
- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número impar, es el conjunto de los números reales.
- La gráfica de las funciones polinómicas de la forma $y = x^n$, con n un número par, tiene forma de parábola, similar a la función cuadrática $y = x^2$; si n es impar, la gráfica tiene una forma similar a la de la función cúbica $y = x^3$.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- La gráfica de las funciones $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, corta los ejes en $(0, 0)$.

Ejemplo 2

Dado que las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = x^8$ son de la forma $y = x^n$, con n par se cumple que.

1. El recorrido de cada una es el intervalo $[0, +\infty)$.
2. Son simétricas respecto al eje Y porque:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^4 = x^4 = g(x)$$

$$h(-x) = (-x)^8 = x^8 = h(x)$$

3. Tienen forma de parábola, similar a $y = x^2$ y cortan a los ejes en el punto $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 2.20.

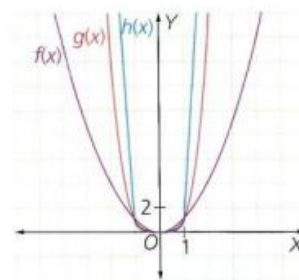


Figura 2.20

Ejemplo 3

Dado que las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$ y $h(x) = x^{11}$, son de la forma $y = x^n$, con n par se cumple que:

1. El recorrido es el conjunto de los números reales.
2. Son simétricas respecto al origen de coordenadas:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x = -f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -g(x)$$

$$h(-x) = (-x)^{11} = -x^{11} = -h(x)$$

3. Las gráficas funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen forma similar a $y = x^3$ y cortan a los ejes en el punto $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 2.21.

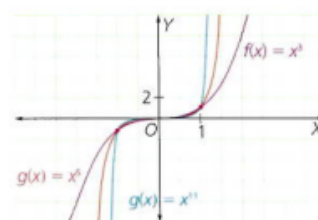


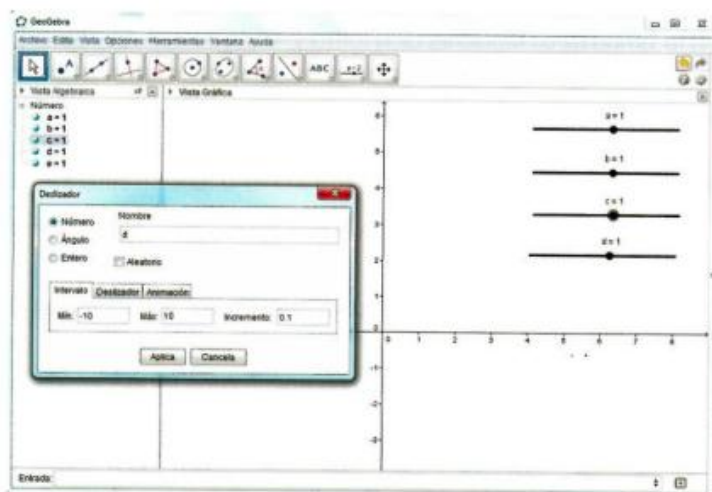
Figura 2.21

USAR GEOGEBRA PARA REPRESENTAR LAS FUNCIONES POLINOMICAS.
MatemaTICS
Representa funciones polinómicas en GeoGebra

- Observa el procedimiento para representar funciones polinómicas hasta de grado 3.

Haz clic en el botón , selecciona la opción "Deslizador" y haz clic sobre la Vista Gráfica de GeoGebra. En la ventana que se despliega, cambia los valores máximo y mínimo del intervalo por -10 y 10 , respectivamente. Deja el incremento en $0,1$ y haz clic en el botón "Aplica".

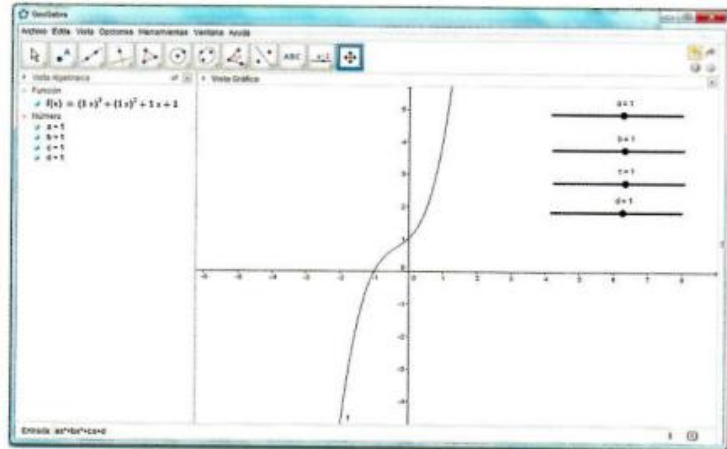
En GeoGebra aparece el deslizador a. Construye otros tres deslizadores con las mismas características y nómbralos como b, c y d.





En la barra de entrada escribe $ax^3 + bx^2 + cx + d$ y pulsa Enter. En GeoGebra se observa la gráfica de la función $x^3 + x^2 + x + 1$, ya que todos los deslizadores están ubicados en 1.

Ten en cuenta que si ubicas un deslizador en 0, esto equivale a eliminar el término correspondiente al deslizador. De esta manera, podrás obtener la gráfica de funciones polinómicas de grado 0, 1, 2 y 3.



Mueve los deslizadores para cambiar el valor de los coeficientes de cada término; observa cómo varía la gráfica de la función polinómica y responde.

- ¿Qué obtienes si ubicas todos los deslizadores en 0?
- ¿Qué valores deben tomar los deslizadores para obtener una parábola? Escribe distintas posibilidades.
- ¿Qué valores deben tomar los deslizadores para obtener una recta?

Taller N°2: Funciones polinómicas

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

- Determina cuáles de las siguientes funciones son polinómicas y, para estas, halla el grado y el término independiente.
 - $f(x) = 7$
 - $f(x) = 4x^2$
 - $f(x) = -4x^{\frac{1}{2}} + 3x^2$
 - $f(x) = 2(x^3 - 4x^5 + 1)$
- Halla el dominio y recorrido de las siguientes funciones polinómicas.
 - $y = x^4 + 3$
 - $y = x^5 - 1$
 - $y = x^3 + 2$
 - $y = x^2 - 4$

Razonamiento

- Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función polinómica.

Modelación

- Escribe un polinomio para cada caso.
 - Grado 1 y corte con el eje Y en (0, 3).
 - Grado 4 y (0, 0) como punto de corte con el eje X.
 - Grado 3 y es una función impar.

Resolución de problemas

- Las gráficas de las funciones cuadráticas tienen un punto máximo si abren hacia abajo y un punto mínimo si abren hacia arriba. En cualquiera de los casos, tal punto se denomina **vértice**.

El vértice de una parábola es el punto que tiene abscisa $x = \frac{-b}{2a}$.

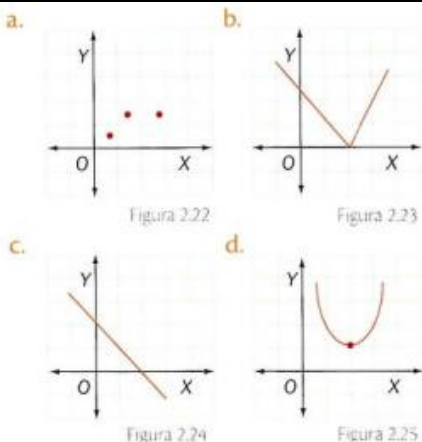


Figura 2.22

Figura 2.23

Figura 2.24

Figura 2.25

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

- a. Una función polinómica con todos los exponentes pares es una función par.

mentes pares es una función par.

- b. Una función polinómica en la que todos los exponentes que aparecen son impares es una función impar.
- c. El producto de dos funciones polinómicas de grado m es una función polinómica de grado m .
- d. La suma de dos funciones polinómicas de grado m es una función polinómica de grado m .
- e. Si $P(x)$ es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, la ecuación $P(x) = 0$ siempre tiene al menos una solución real.

- a. Determina el signo de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.
- b. ¿Cuál es el vértice de una parábola que corta los ejes en los puntos $(-1, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, -10)$?
- c. Halla el dominio y el recorrido de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Luego, encuentra el vértice de la parábola correspondiente.

7. Una tenista ha lanzado una pelota que sigue una trayectoria dada por la fórmula $y = 8t - t^2 + 1,6$; donde t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde el lanzamiento y y es la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

- a. ¿A qué tipo de gráfica corresponde la trayectoria que describe la fórmula?
- b. ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?
- c. ¿Cuál es la altura máxima conseguida?

Evaluación del aprendizaje

- i. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas cada función polinómica y construye una tabla de valores para trazar el bosquejo de su gráfica.
- a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
- b. $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$
- ii. Describe las características de las funciones
- ★ $p(x) = x^{12}$ y $m(x) = x^{15}$ y traza el bosquejo de sus gráficas.

Funciones racionales

Una función $f(x)$ de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$, se llama **función racional**.

El **dominio** de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 1

Las funciones

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x - 5}$$

$$g(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$$



El dominio de cada función se hallan los valores de la variable independiente que anulan el denominador.

- Para f se resuelve la ecuación $x - 5 = 0$, de donde se obtiene que $x = 5$.
Luego, $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$.

- Para g se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2$$

De lo cual, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntotas

Asíntotas de funciones racionales

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.
2. a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$.
c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Taller N°3: Funciones racionales

**Ejercitación**

- 1 Determina cuáles de las siguientes funciones son racionales. Justifica tus respuestas.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$

b. $g(x) = \frac{5x + 3}{4}$

c. $h(x) = \frac{2x}{x^2 - 5}$

d. $j(x) = \frac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$

e. $k(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 - 1}$

- 2 Determina el dominio y las asíntotas de cada una de las siguientes funciones racionales.

a. $g(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - x + 5}{x^2 - 4x + 4}$

b. $h(x) = \frac{3x + 4}{3x - 4}$

c. $j(x) = \frac{x - 3}{x^3 - 27}$

d. $k(x) = \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 50}$

e. $f(x) = \frac{-6x^2}{x^2 + 1}$

f. $g(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$

g. $h(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$

h. $k(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - 2x - 2}$

i. $f(x) = \frac{x - 7}{x^2 - 14x + 49}$

j. $g(x) = \frac{2x - 3}{2x^2 + 7x - 15}$

k. $h(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x^4 - 1000x}$

l. $j(x) = \frac{2}{(x - 3)(x + 4)x}$

m. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Modelación

- 3 Dibuja la gráfica de una función racional que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

a. Tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y una asíntota horizontal en $y = -1$.

b. Su dominio es $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

- 4 Relaciona cada una de las funciones de las figuras 2.29 y 2.30 con la fórmula que le corresponde. Luego, determina las asíntotas, el dominio y la simetría en cada una de ellas.

a. $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

b. $f(x) = \frac{-1}{x - 1}$

1.

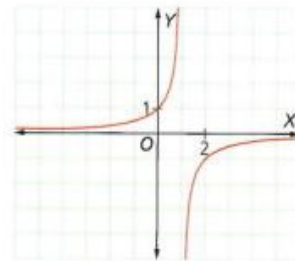


Figura 2.29

2.

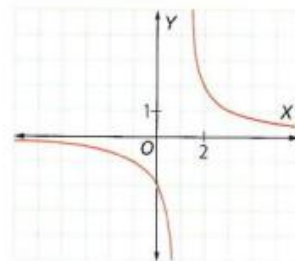


Figura 2.30

Razonamiento

- 5 Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales y, en caso afirmativo, escribe un ejemplo.



Funciones exponenciales y logarítmicas

La función exponencial es la forma $f(x) = b^x$, siempre que b sea un número real positivo distinto de 1.

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

- El dominio de $f(x) = b^x$ es el conjunto de los números reales.
- El rango de $f(x)$ es $(0, +\infty)$.
- El punto de corte de la función $f(x)$ con el eje Y es el punto $(0, 1)$.
- El eje X es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
- La función $f(x) = b^x$ vista de izquierda a derecha asciende si $b > 1$, y desciende si $0 < b < 1$.

Ejemplo 1

Las funciones exponenciales

$$f(x) = 2^x \text{ y } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

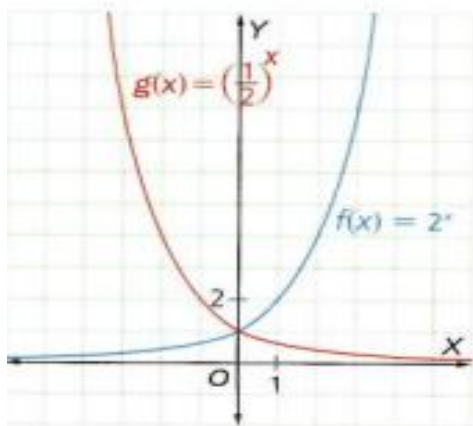
Se cumple que

$$D(f) = \mathbb{R} = D(g)$$

$$R(f) = (0, +\infty) = R(g)$$

La intersección de f y g con el eje Y es $(0, 1)$.

f vista de izquierda a derecha asciende, mientras que g desciende.



Funciones exponenciales de la forma $f(x) = ab^x$



Las funciones de la forma $f(x) = a \cdot b^x$, con $a \neq 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, son funciones exponenciales, cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

El recorrido de $f(x) = a \cdot b^x$ es el intervalo $(0, +\infty)$ si $a > 0$, o el intervalo $(-\infty, 0)$ si $a < 0$. El punto de corte de estas funciones con el eje Y es $(0, a)$.

Ejemplo 2

En la Figura 2.32 se muestran las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = 2 \cdot 3^x$ y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

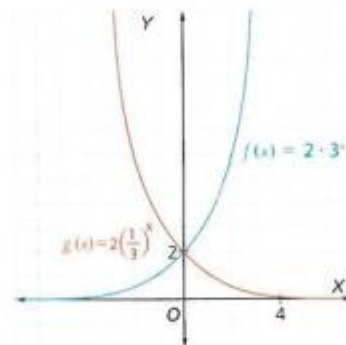


Figura 2.32

El punto de corte con el eje Y de las funciones f y g es $(0, 2)$ y,

$D(f) = \mathbb{R} = D(g)$ y $R(f) = (0, +\infty) = R(g)$.

Función logarítmica

Una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a \neq 0$ y $a^{f(x)} = x$, se conoce como **función logarítmica**.

Ejemplo 3

Si $f(x) = \log_2 x$, para hallar el valor de $f(1) = \log_2 1$, se debe encontrar un valor y , tal que $2^y = 1$; este valor es 0, ya que $2^0 = 1$.

Para hallar otros valores de $f(x) = \log_2 x$, se realiza un procedimiento similar.

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3, f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2, f(2) = \log_2 2 = 1.$$

Propiedades de la función logarítmica



- El dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es el conjunto de los números reales mayores que 0 y el rango es el conjunto de los números reales.
- Para todo valor $a \neq 0$, $\log_a 1 = 0$; es decir, la intersección con el eje X es el punto $(1, 0)$. La gráfica de la función $f(x) = \log_a x$ no interseca el eje Y.
- El eje Y es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.
- La gráfica de $f(x)$ vista de izquierda a derecha asciende si $a > 1$, y desciende si $0 < a < 1$.

Ejemplo 4

En la Figura 2.33 se muestran las gráficas de $f(x) = \log_{10} x$, $g(x) = \log_2 x$ y $h(x) = \log_{0.5} x$. Todas ellas se intersecan en $(1, 0)$ y cumplen las demás propiedades mencionadas.

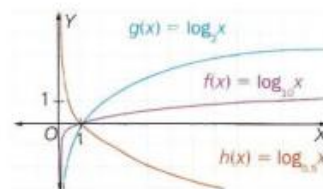


Figura 2.33

Taller N°4: Funciones exponenciales y logarítmicas.**Ejercitación**

- 1 Determina lo que se indica si $f(x) = 4^x$ y

• $g(x) = \log_4 x$.

- a. $f(-2)$ b. $f(0)$ c. $g(4)$ d. $g(1)$

- 2 Halla el dominio y el recorrido de cada función.

• a. $g(x) = \log_2(2x - 1)$ b. $h(x) = 4^x$

c. $f(x) = 4^{-x}$ d. $r(x) = \log\left(\frac{x-7}{x^2-1}\right)$

- 3 Lee y resuelve.

• La función $f(x) = e^x$ es exponencial y es muy importante porque aparece en la descripción de múltiples procesos naturales, como el crecimiento de poblaciones de microorganismos.

Emplea la calculadora para elaborar una tabla de valores y a partir de ella trazar la gráfica de las siguientes funciones. Luego, halla su dominio y su recorrido.

a. $y = -\frac{1}{2}e^x$ b. $y = 3e^x - 1$

- 4 Lee y resuelve.

• El logaritmo que tiene por base el número e se denomina logaritmo natural, se representa como $\ln x = \log_e x$ y cumple que

$$y = \log_e x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Modelación

- 7 Dibuja las funciones simétricas con respecto a la recta $y = x$ de las funciones exponenciales de las figuras 2.34 y 2.35.

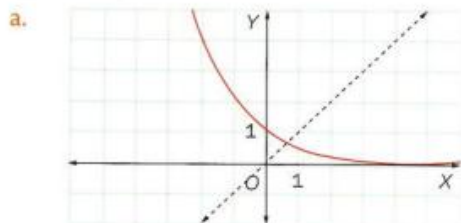


Figura 2.34

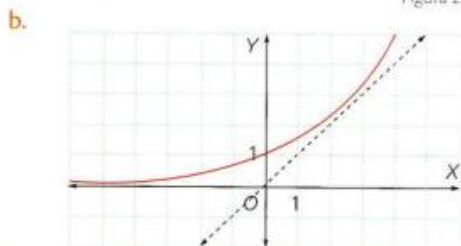


Figura 2.35

- 8 Representa cada par de funciones en un mismo plano cartesiano y con diferente color.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

b. $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones bien definidas? Realiza la gráfica de aquellas que lo sean. Utiliza la calculadora.

a. $f(x) = \ln(x + 1)$ b. $g(x) = \ln(-x)$

- 5 Traza sobre un mismo plano la gráfica de cada una de las siguientes funciones y de su simétrica respecto de la recta $y = x$.

a. $f(x) = 4^x$ b. $g(x) = \log_5 x$

c. $h(x) = \log x$ d. $i(x) = 7^x$

- 6 Dibuja las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = e^x$ en el mismo sistema de ejes coordenados y describe tres características, de las aprendidas, que cumplan todas y al menos dos diferencias entre cada una.

c. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Comunicación

- 9 Completa en tu cuaderno la Tabla 2.6 indicando de qué tipo es cada una de las funciones.

a. $f(x) = e^{2x}$

b. $f(x) = e \cdot x$

c. $f(x) = \log(x + 3)$

d. $f(x) = x \cdot \ln 2$

e. $f(x) = 4^{-x}$

f. $f(x) = x^3$

g. $f(x) = \ln(2x)$

h. $f(x) = 5^x$

Exponencial			
Logarítmica			
Ni exponencial ni logarítmica			

Tabla 2.6

- 10 Determina y escribe el dominio, los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \log_2(x^2 - 16)$ b. $g(x) = \log_2(6x)$

c. $f(x) = (1 - x) \cdot e^x$ d. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{|x - 1|}\right)$

Resolución de problemas

- 11 Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento $f(t)$ después de un tiempo t

satisface la fórmula $f(t) = 60 \cdot 2^{-0.002t}$.

- a. ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?
b. ¿Qué cantidad queda después de 500 años?
c. ¿Qué cantidad queda después de 1 000 años?
d. ¿Qué cantidad queda después de 2 000 años?

- 15 La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto caliente se enfría siguiendo una ley exponencial de acuerdo con la siguiente expresión:

$$y(t) = L + (L_0 - L)e^{-kt}$$

donde $y(t)$ es la temperatura del objeto después de haber transcurrido t minutos; L , la temperatura ambiente; L_0 , la temperatura inicial del cuerpo y k , una constante que depende de la naturaleza del objeto.

Con base en lo anterior, si una taza de café en una habitación a 20°C se enfría de 80°C a 60°C en tres minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse a 30°C ? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la temperatura ambiente?



- 12 Una población de conejos crece un 1,04% por día.
◆ Define una función que describa el número de conejos después de t días, con una población inicial de 500 conejos.



- 13 La fórmula de interés continuo compuesto es
◆ $A(t) = Pe^{rt}$, en donde $A(t)$ es el interés obtenido después de t años, P es la cantidad inicial invertida y r es la tasa de interés. ¿Cuál es el dominio y punto de corte con el eje Y de $A(t)$?

- 14 La Tabla 2.7 muestra el número de peces, P , que hay en un estanque al cabo de t meses.

t	0	1	2	3	4	5
P	25	43	75	130	224	387

Tabla 2.7

- Encuentra la función que modela esta situación.
- ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, se necesita para duplicar en cualquier momento la población de peces que hay en el estanque?
- ¿Al cabo de cuánto tiempo, aproximadamente, se llegará a una población de 1000 peces?

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Calcula el número de amebas que habrá después de 1, 2, 3 y 4 horas. Construye la tabla de datos correspondiente, escribe la expresión analítica de la función que define el crecimiento de la población de amebas, traza el bosquejo de su gráfica y describe tres de sus características.

Educación ambiental

Una bacteria en un ambiente favorable produce $4,7 \times 10^{21}$ bacterias en un día. Define la función que describa el número de bacterias después de t días, con una población inicial de 1000 bacterias.

- ¿Crees que el crecimiento exponencial de las bacterias ayudan a los procesos de biorremediación? Justifica.

Funciones definidas a trozos

**Conoce**

De la tabla se deduce la expresión que permite definir la función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 20 + 5x, & \text{si } 0 < x < 50 \\ 20 + 4,5x, & \text{si } 50 \leq x < 100 \\ 25 + 4x, & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

donde los precios están dados en miles de pesos.

Como se puede observar, esta función viene dada por una fórmula distinta para cada una de sus partes.

Las **funciones definidas a trozos** están definidas aplicando diferentes fórmulas a las distintas partes de su dominio.

Comportamiento de f en valores próximos a $x = 0$ y $x = 50$:

$x > 0$	$x < 50$	$x > 50$
$f(0,5) = 20 + 5(0,5) =$ \$ 22,5	$f(49,5) = 20 + 5(49,5) =$ \$ 267,5	$f(50,5) = 20 + 4,5(50,5) =$ \$ 247,25
$f(0,1) = 20 + 5(0,1) =$ \$ 20,5	$f(49,9) = 20 + 5(49,9) =$ \$ 269,5	$f(50,1) = 20 + 4,5(50,1) =$ \$ 245,45
$f(0,01) = 20 + 5(0,01)$ = \$ 20,05	$f(49,99) = 20 + 5(49,99)$ = \$ 269,95	$f(50,01) = 20 + 4,5(50,01) =$ \$ 245,045

Tabla 2.8

Comportamiento en valores próximos a $x = 100$:

Comportamiento en valores próximos a $x = 100$:

$x < 100$	$x > 100$
$f(99,5) = 20 + 4,5(99,5) = \$ 467,75$	$f(100,5) = 25 + 4(100,5) = \$ 427$
$f(99,9) = 20 + 4,5(99,9) = \$ 469,55$	$f(100,1) = 25 + 4(100,9) = \$ 425,4$
$f(99,99) = 20 + 4,5(99,99) = \$ 469,955$	$f(100,01) = 25 + 4(100,99) = \$ 425,04$

Tabla 2.9

Todos los precios están dados en miles de pesos

En esta función hay tres puntos de discontinuidad: en $x = 0$, en $x = 50$ y en $x = 100$. Si se acerca a 0 tomando valores mayores, por la derecha, tiende a 20; si se acerca a 50 tomando valores inferiores, por la izquierda, la función tiende a 270 y si se acerca tomando valores superiores, por la derecha, tiende a 245. Cuando x se acerca a 100, la función tiende a 470 y a 425 según se tomen valores por la izquierda o por la derecha de 100, respectivamente.

Con esta información se traza la gráfica teniendo en cuenta que los puntos de discontinuidad deben representarse con un punto abierto, cuando el valor no haga parte de los intervalos definidos en la función. En la Figura 2.36 se observa la gráfica de la función.

A partir de la gráfica se observa que $D(f) = (0, +\infty)$.

De otro lado $R(f) = (20, +\infty)$.

La función f no corta ni al eje X ni al eje Y .


Figura 2.36

Ejemplo 1

Para graficar la función $f(x)$, se analizan los intervalos en los que está definida.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x < -3 \\ 5 - x^2, & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ \frac{2x - 4}{x}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- El primer intervalo es $(-\infty, -3)$. La función es la recta $x - 1$.
- En $[-3, 2]$, la gráfica corresponde a una parábola que abre hacia abajo.
- En $(2, \infty)$, la representación gráfica es una curva ascendente.

Observa que en el punto $(2, 1)$ de la gráfica aparece un punto relleno. Esto es debido a que el intervalo $[-3, 2]$ es cerrado en 2. De otra parte el punto $(2, 0)$ de la gráfica se ha representado con un punto vacío, debido a que el intervalo $(2, +\infty)$ es abierto en 2. Observa la Figura 2.37.

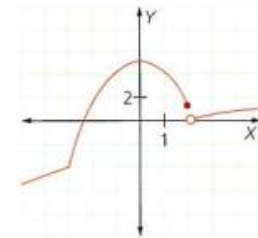


Figura 2.37

Taller N°5: Funciones definidas a trozos.

**Actividades de aprendizaje****Ejercitación**

- 1 Representa las siguientes funciones e indica los intervalos en los que asciende y desciende.

a. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2x + 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} -2x - 3, & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 5, & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Resolución de problemas

- 3 Escribe los intervalos en los que, vista de izquierda a derecha, la función de la Figura 2.39 asciende y aquellos en los que desciende.

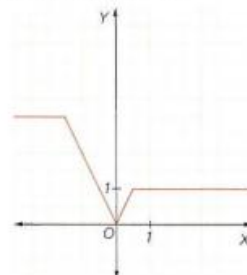


Figura 2.39

Razonamiento

- 2 Encuentra y escribe la expresión analítica de la función cuya gráfica se muestra en la Figura 2.38.

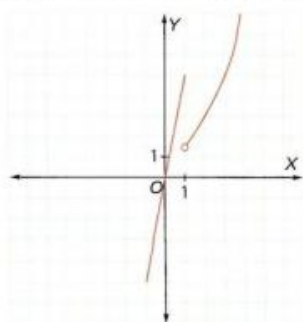


Figura 2.38

Evaluación del aprendizaje

- ✓ Un médico cobra las consultas de acuerdo con su duración, así:
- Hasta 6 minutos, cobra \$ 50 000.
 - Entre 6 y 15 minutos cobra \$ 80 000.
 - Por encima de 15 minutos cobra \$ 80 000 más \$ 5 000 por cada minuto adicional a los 15 minutos.
- a. Describe su dominio y su recorrido
- b. Escribe la función que modela la situación.
- c. Elabora una gráfica para esta situación.
- d. Calcula el valor de una consulta de 20 minutos.

Funciones valor absoluto y parte entera**Función Valor absoluto**



La expresión $|a|$ simboliza el valor absoluto de un número real a y representa la distancia de a a 0. El valor absoluto de un número a se define así:

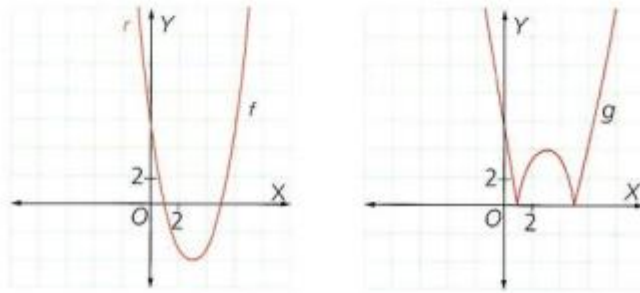
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La función valor absoluto se define de manera similar al valor absoluto de un número real mediante una función definida a trozos.

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } x < 0 \\ f(x), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Para dibujar la gráfica del valor absoluto de una función, se puede dibujar primero la función y luego se aplica una reflexión de la gráfica con respecto al eje X , en los intervalos en los que el signo de la función sea negativo. En la Figura 2.40 se observa la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$, y en la Figura 2.41, la gráfica de $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$. Como en el intervalo $[1, 5]$ el signo de $f(x)$ es negativo, se hace la reflexión de esa parte de la gráfica con respecto al eje X en la gráfica de $g(x)$.



Función parte entera

La función parte entera, que se representa por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, es la función que asocia a cada número decimal su parte entera, es decir, el mayor número entero menor o igual que x .

Por ejemplo, $f(3,45) = 3$, $f(0,48) = 0$.

Observa que $f(-1,28) = -2$, pues -2 es el número entero más próximo $-1,28$ y es menor que este.

La función parte entera se puede definir como una función por partes, así:

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \\ -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dots & \end{cases}$$

La gráfica de esta función y sus características se muestran en la Figura 2.43.

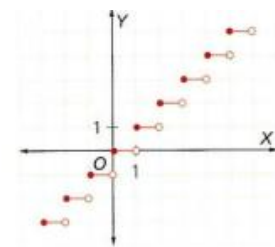


Figura 2.43

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$R(f) = \mathbb{Z}$$

f corta al eje X en el intervalo $[0, 1)$ y al eje Y en $(0, 0)$.

f no es simétrica.

**Taller N°6: Funciones valor absoluto y parte entera****Ejercitación**

- 1 Representa las siguientes funciones e indica el dominio y el rango de cada una.

a. $r(x) = |5x|$ b. $q(x) = |3x + 1|$
c. $g(x) = [4x] - 4$ d. $h(x) = [-x + 2]$
e. $j(x) = \left| \frac{1}{2}x - 3 \right|$ f. $k(x) = [x] + 3$

- 2 Expresa la función $f(x) = |2x + 6| - 2 \cdot |x - 1|$ como una función definida a trozos.

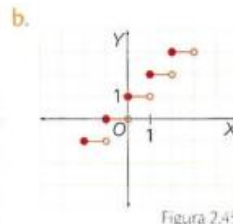
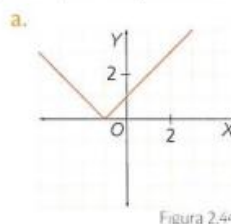
- a. Representa su gráfica.
b. Halla su dominio y su recorrido.
c. Determina los puntos de corte con los ejes.

Modelación

- 3 ¿Cuál de los siguientes enunciados se puede modelar con la función $f(x) = 3 - 0,8[1 - x]$?

- a. Un estacionamiento cobra \$ 3000 por la primera hora y descuenta \$ 800 por cada hora adicional de parqueo.
b. Una lavandería cobra \$ 3000 por el primer kilogramo de ropa y \$ 800 por cada libra o fracción adicional.
c. En la panadería cobran \$ 3000 por cada libra de queso costeño y rebajan \$ 800 por cada libra adicional que lleve un cliente.

- 4 En cada caso, escribe una expresión que modele la gráfica que se representa.

**Evaluación del aprendizaje**

- i Un artista lanzó un nuevo álbum musical. Las ventas semanales x (en miles de unidades) aumentaron durante cierto tiempo pero luego decrecieron de acuerdo con el modelo: $s = -2|t - 20| + 40$ donde t es el tiempo en semanas.
- a. Grafica la función.
b. ¿Cuál es el número máximo de unidades vendidas en una semana?
- ii El costo por alquilar un videojuego durante t horas está determinado por la función $f(t) = 2800 + 500[t]$.
- a. Determina el costo de alquilar el videojuego por 2 horas y media.
b. Traza la gráfica de la función f .

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g con $g \neq 0$

**Sumas, diferencias, productos y cocientes**

La suma de f y g se define mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es " $f + g$." Por lo tanto, este signo $+$ representa la operación de adición de funciones. El signo $+$ del lado derecho, sin embargo, representa la suma de los números $f(x)$ y $g(x)$.

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g de una manera similar a la forma en que se suma, resta, multiplica y divide números reales. Por ejemplo, se define la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función $f + g$ se llama **suma** de las funciones f y g ; su valor en x es $f(x) + g(x)$. Por supuesto, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si x pertenece al dominio de f y también al dominio de g . Así, si el dominio de f es A y el dominio de g es B , entonces el dominio de $f + g$ es la intersección de estos dominios, es decir, $A \cap B$. De manera similar, se puede definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg , y el **cociente** f/g de las funciones f y g . Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente se debe recordar no dividir entre cero.

Álgebra de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B . Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g se definen como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Dominio $A \cap B$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Dominio $A \cap B$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Dominio $A \cap B$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

El siguiente video apoyan la teoría descrita.

<https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw>

Ejemplos:**Ejemplo 1 Combinaciones de funciones y sus dominios**

$$\text{Sean } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x}.$$

a) Encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

b) Encuentre $(f + g)(4)$, $(f - g)(4)$, $(fg)(4)$ y $(f/g)(4)$.

Solución:

- a) El dominio de $f + g$ es la intersección del dominio de cada una de las funciones.



Dominio de $f(x) = \frac{1}{x-2}$, al ser $x - 2$ denominador no puede tomar $x = 2$

Porque sería división entre cero, luego el dominio es real menos el 2, así: $\{x/x \neq 2\}$

Para $g = \sqrt{x}$, por ser raíz cuadrada, $x \geq 0$, resolver la desigualdad.

Es el intervalo $[0, \infty)$

La intersección de $\{x/x \neq 2\}$ y $[0, \infty)$ es $[0, 2) \cup (2, \infty)$.

O también podemos escribir dominio $\{x/x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$

Ese dominio es para todas las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$, Para esta el dominio $\{x/x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$, es decir cero no puede ser por ser denominador.

Ejemplo 2.

Dadas las funciones $f(x) = 3x-5$ y $g(x) = 2-x^2$, Hallar el gráfico de la función $f + g$.

Dominio son los números reales, por ser f y g funciones polinómicas.

$$(f + g)(x) = 3x-5+2-x^2$$

$$(f + g)(x) = -x^2+3x-3$$

Por ser parábola, encuentro el vértice que es $x = \frac{-b}{2a}$ luego es $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) - 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-3}{4}$$

Vértice es $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{4}\right)$

Intercepto eje x , $y = 0$, $-x^2+3x-3 = 0$, factoriza

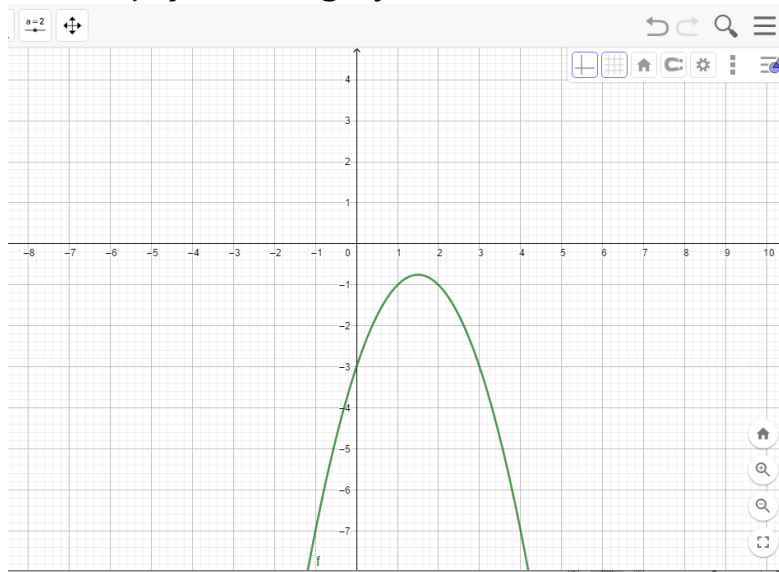
No factoriza usamos formula general



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)}$$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{-2}$, no es un número real, lo que significa que no tiene intercepto con el eje x.

Con el eje y, $x=0$ luego, $y = -3$.



A. Función compuesta

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g , la **función compuesta** $f \circ g$ (denominada también la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f . En otras palabras $(f \circ g)(x)$ se define siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. Se puede ilustrar $f \circ g$ por medio de un diagrama de flecha (figura 4).

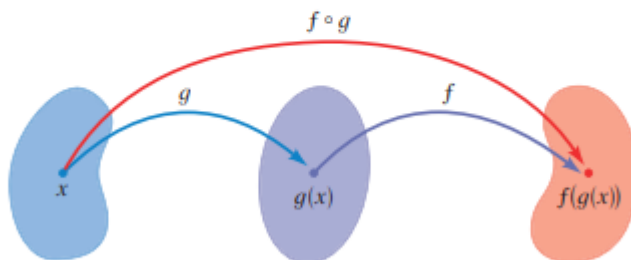


Figura 4

Diagrama de flechas para $f \circ g$

Ejemplo 3 Determine la composición de funciones

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

- Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.
- Halle $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

Solución

- Se tiene

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x - 3) && \text{Definición de } g \\ &= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f \\ y \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(x^2) && \text{Definición de } f \\ &= x^2 - 3 && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

- Se tiene

$$\begin{aligned} (f \circ g)(5) &= f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4 \\ (g \circ f)(7) &= g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46 \end{aligned}$$

Del ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y después f .

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "restar 3". La función $f \circ g$ primero resta 3 y después eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ primero eleva al cuadrado y luego resta 3.

Ejemplo 4 Determine la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

- a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

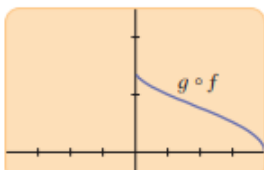
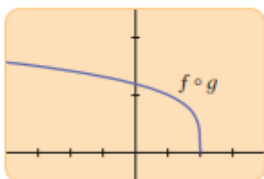
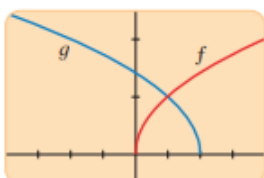
Solución

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{\sqrt{2-x}} && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt[4]{2-x} \end{aligned}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2-x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\ &= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt{2-\sqrt{x}} && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Las gráficas de f y g del ejemplo 4, así como $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones bastante diferentes de las funciones originales.



Para que $\sqrt{x}$ esté definida, se debe tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ esté definida, se debe tener $2-\sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o bien $x \leq 4$. Así, se tiene $0 \leq x \leq 4$, por lo tanto el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f \\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g \\ &= g(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2-x}} && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Esta expresión se define cuando $2-x \geq 0$ y $2-\sqrt{2-x} \geq 0$. La primera desigualdad significa $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2-x} \leq 2$, o $2-x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por lo tanto, $-2 \leq x \leq 2$, así que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar h , luego g y después f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Ejemplo 5 Una composición de tres funciones

**Taller N°7: Operación con funciones****Tomado de: Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición****1-6 ■ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.**

1. $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$

3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 + x}$

4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

5. $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x + 4}$

6. $f(x) = 2/x + 1$, $g(x) = x/x + 1$

7. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B .a. ¿Cuál es el dominio de $f + g$?b. ¿Cuál es el dominio de fg ?c. ¿Cuál es el dominio de f/g ?**Taller N°8. Cociente entre funciones y función compuesta:****Tomado de matemáticas de 11° Ministerio de Educación Nacional**

Halla los dominios que se indican, dadas

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 3$ y $h(x) = x - 5$.

a. Dominio de $\frac{g(x)}{f(x)}$. b. Dominio de $f \circ g$.c. Dominio de $g \circ f$. d. Dominio de $f \circ f$.

Realiza las operaciones y determina el dominio de

cada función si $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$ y

$h(x) = x^2 - 4$.

a. $\frac{g}{f}$

b. $f \circ g$

c. $g \circ f$

d. $f \circ g \circ h$

Taller N°9: Función compuesta

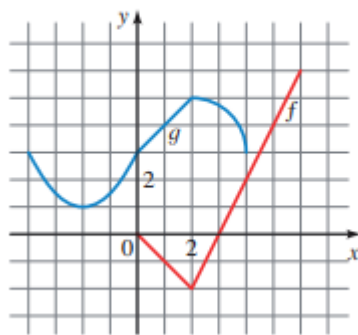


1. Use $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ Para evaluar la expresión.

- a. $f(g(0))$
- b. $f(f(4))$
- c. $(f \circ g)(-2)$
- d. $(f \circ g)(-1)$
- e. $(g \circ f)(-2)$
- f. $(g \circ f)(x)$
- g. $(f \circ g)(x)$

2.

■ Use las gráficas de f y g para evaluar la expresión.



- a. $f(g(2))$
- b. $g(f(0))$
- c. $(g \circ f)(4)$
- d. $(f \circ g)(0)$

Funciones uno a uno y sus inversas

Funciones uno a uno

Compárense las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la figura 1. Hay que observar que f nunca toma el mismo valor dos veces (dos números cualesquiera en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se llaman *uno a uno*.

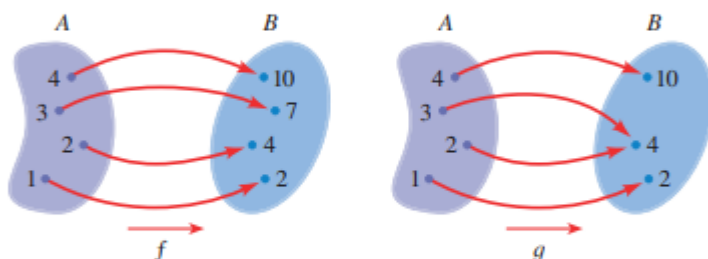


Figura 1

f es uno a uno

g no es uno a uno

Definición de una función uno a uno

Una función con dominio A se llama **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición de una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

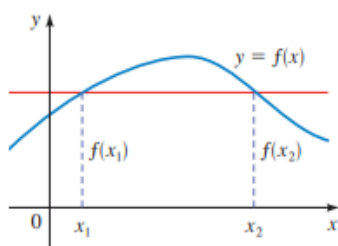


Figura 2

La función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces se puede observar en la figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, se tiene el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si ninguna recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.

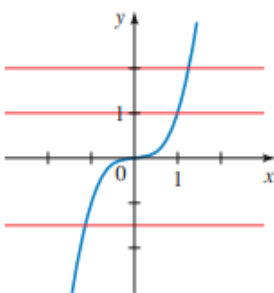


Figura 3
 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

Ejemplo 1 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

Solución 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

Solución 2 En la figura 3 se puede observar que ninguna recta horizontal cruza la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, mediante la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno. ■

Observe que la función f del ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede probar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno*.

Ejemplo 2 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

Solución 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad g(-1) = 1$$

y, por lo tanto, 1 y -1 tienen la misma imagen.

Solución 2 De la figura 4 se puede observar que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno. ■

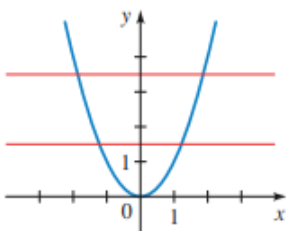


Figura 4
 $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

Aunque la función g del ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de modo que la función resultante sea uno a uno. De hecho, si se define

Figura 4
 $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

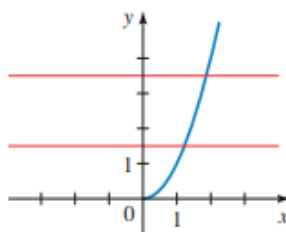


Figura 5
 $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) es uno a uno.

Aunque la función g del ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de modo que la función resultante sea uno a uno. De hecho, si se define

$$h(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede observar en la figura 5 y la prueba de la recta horizontal.

Ejemplo 3 Mostrar que una función es uno a uno

Muestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

Solución

Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \quad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \quad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, f es uno a uno. ■



⚠ No confunda el -1 en f^{-1} con un exponente.

$$f^{-1} \text{ no significa } \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

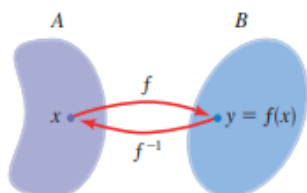


Figura 6

Definición de la inversa de una función

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B . Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier y en B .

Esta definición establece que si f envía x a y , entonces f^{-1} envía a y de nuevo a x . (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas en la figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f . De la definición se tiene

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Ejemplo 4 Encuentre f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$ encuentre $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$, y $f^{-1}(-10)$.

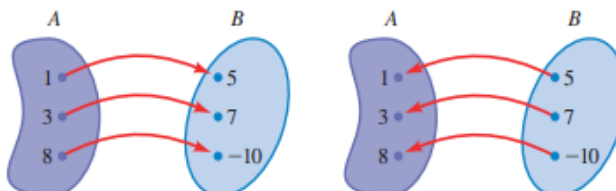
Solución De la definición de f^{-1} se tiene

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

En la figura 7 se muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.



Propiedad de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B . La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

A la inversa, cualquier función f^{-1} que satisface estas ecuaciones es la inversa de f .



Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1} , por lo tanto se dice que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

Ejemplo 5 Verificar que dos funciones son inversas

Muestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

Solución Observe que el dominio y el rango de f y g es $\mathbb{R}$. Se tiene

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por consiguiente, por la propiedad de las funciones inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente expresan que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando se componen, se cancelan entre sí. ■

Ahora se examinará cómo se calculan las funciones inversas. Se observa primero de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

En consecuencia, si $y = f(x)$ y si se puede resolver esta ecuación para x en términos de y , entonces se debe tener $x = f^{-1}(y)$. Si luego se intercambian x y y , se tiene $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

Cómo hallar la inversa de una función uno a uno

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y . La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

En el ejemplo 6 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f . La función f es la regla "multiplicar por 3, luego restar 2", mientras que f^{-1} es la regla "sumar 2, luego dividir entre 3".

Compruebe su respuesta

Se usa la propiedad de la función inversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x - 2) \\ &= \frac{(3x - 2) + 2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x + 2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 \\ &= x + 2 - 2 = x \end{aligned} \quad \checkmark$$

Hay que observar que se pueden invertir los pasos 2 y 3. En otras palabras, se puede intercambiar x y y primero y luego resolver para y en términos de x .

Ejemplo 6 Cómo determinar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

Solución Primero se escribe $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

Luego, de esta ecuación se despeja x :

$$3x = y + 2 \quad \text{Suma 2}$$

$$x = \frac{y + 2}{3} \quad \text{Divida entre 3}$$

Por último, se intercambian x y y :

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$. ■



En el ejemplo 7 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f . La función f es la regla "tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "multiplique entre 2, sume 3, luego tome la raíz quinta".

Compruebe su respuesta

Se emplea la propiedad de la función inversa.

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\
 &= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\
 &= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\
 &= (x^5)^{1/5} = x \\
 f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\
 &= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\
 &= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\
 &= \frac{2x}{2} = x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7 Hallar la inversa de una función



Encuentre la inversa de la función $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$.

Solución Primero se escribe $y = (x^5 - 3)/2$ y se despeja x .

$$y = \frac{x^5 - 3}{2} \quad \text{Ecuación que define la función}$$

$$2y = x^5 - 3 \quad \text{Multiplique por 2}$$

$$x^5 = 2y + 3 \quad \text{Sume 3}$$

$$x = (2y + 3)^{1/5} \quad \text{Tome las raíces quintas}$$

Luego se intercambia x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$. ■

El principio de intercambiar x y y para encontrar la función inversa también proporciona un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f . Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está sobre la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está sobre la gráfica de f^{-1} . Pero el punto (b, a) se obtiene del punto (a, b) al reflejar en la línea $y = x$ (véase figura 8). Por lo tanto, como se ilustra en la figura 9, lo siguiente es cierto.

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

$y \uparrow$

$y = x$

$y \uparrow$

$y = x$

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

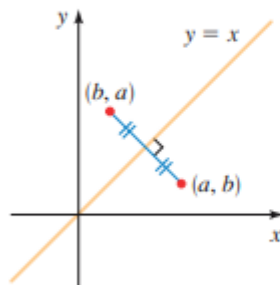


Figura 8

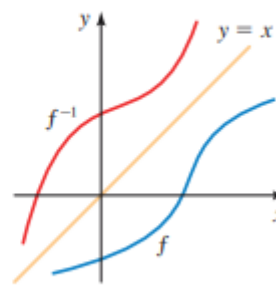


Figura 9

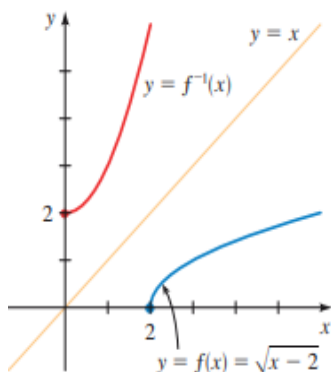


figura 10

Ejemplo 8 Encontrar la inversa de una función

- Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-2}$.
- Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1} .
- Encuentre una ecuación para f^{-1} .

Solución

- Con las transformaciones de la sección 2.4, se bosqueja la gráfica de $y = \sqrt{x-2}$ al trazar la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2) y moverla a la derecha dos unidades.
- La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f en el inciso a) reflejándola en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 10.

- De $y = \sqrt{x-2}$ despeje x , notando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x-2 = y^2$$

eleva al cuadrado ambos miembros

$$x = y^2 + 2, \quad y \geq 0$$

Suma 2

En el ejemplo 8 se puede observar cómo f^{-1} invierte el efecto de f . La función f es la regla “reste 2, luego tome la raíz cuadrada”, mientras que f^{-1} es la regla “eleve al cuadrado, después suma 2”.

Intercambie x y y :

$$y = x^2 + 2, \quad x \geq 0$$

Por consiguiente, $f^{-1}(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la figura 10, esto parece razonable. ■

Taller N°9: Funciones inversas**Tomado de matemáticas de 11° Ministerio de Educación Nacional**



- 1 Decide si las funciones que se representan enseguida tienen inversa y si es así, traza el bosquejo de su gráfica.

a.

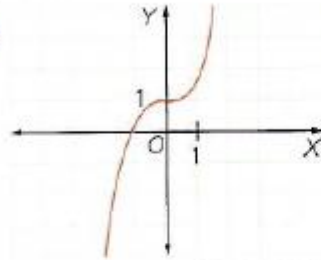


Figura 2.47

b.

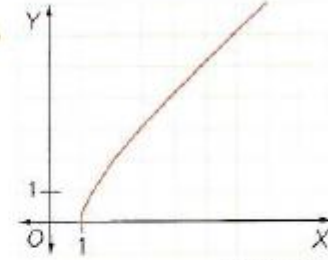


Figura 2.48

- 2 Determina si cada una de las siguientes funciones tiene inversa. De ser así, escribe su expresión analítica, halla su dominio y recorrido y traza el bosquejo de su gráfica.

a. $f(x) = 2x - 3$

b. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

c. $f(x) = x^2 + 2$

d. $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 3$



3 Lee, analiza y responde.

- a.** Si la imagen de 0 mediante una función f es 3, ¿qué se puede afirmar de la imagen de 3 respecto a la función inversa de f ?
- b.** ¿Por qué las funciones que determinan parábolas no tienen inversa?
- c.** ¿Por qué la función $f(x) = |x|$ no tiene inversa?

Ejercitación

4 Calcula lo que se indica, si $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-2x}$.

- a.** $f^{-1}(x)$
- b.** $f^{-1}(3)$
- c.** $g^{-1}(x)$
- d.** $g^{-1}(2)$

5 Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de cada función.

- a.** $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$
- b.** $g(x) = \sqrt{x^3-1}$
- c.** $h(x) = \log x$
- d.** $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

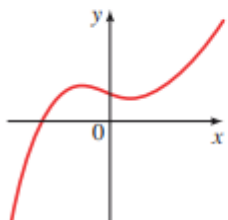
Taller N°10: Función uno a uno; prueba de la recta horizontal

Tomado de: Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición

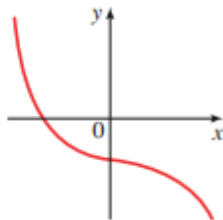


1-6 ■ Se da la gráfica de una función f . Determine si f es uno a uno.

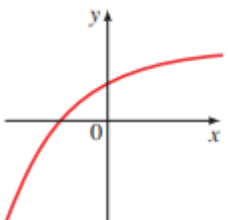
1.



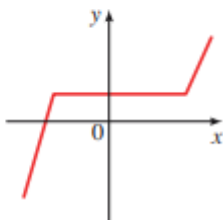
2.



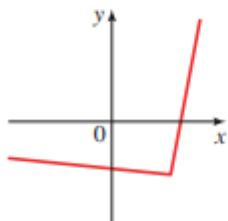
3.



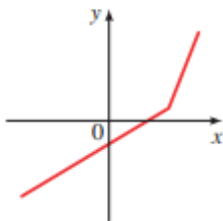
4.



5.



6.



7-16 ■ Determine si la función es uno a uno.

7. $f(x) = -2x + 4$

8. $f(x) = 3x - 2$

9. $g(x) = \sqrt{x}$

10. $g(x) = |x|$

11. $h(x) = x^2 - 2x$

12. $h(x) = x^3 + 8$

13. $f(x) = x^4 + 5$

14. $f(x) = x^4 + 5, 0 \leq x \leq 2$

15. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

16. $f(x) = \frac{1}{x}$

Taller N°11: Funciones inversas

Tomado de: Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición



17-18 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

17. a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.

b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

18. a) Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.

b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

19. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

20. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \geq -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

Tarea N°12 Usando la propiedad de la función inversa

Tomado de: Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición

21-30 ■ Use la propiedad de la función inversa para mostrar que f y g son inversas entre sí.

21. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$

22. $f(x) = 3x$, $g(x) = \frac{x}{3}$

23. $f(x) = 2x - 5$; $g(x) = \frac{x+5}{2}$

24. $f(x) = \frac{3-x}{4}$; $g(x) = 3 - 4x$

25. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

26. $f(x) = x^5$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$

27. $f(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$;
 $g(x) = \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$

Tarea N°13: Encuentro la función inversa

Tomado de: Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición

31-50 ■ Encuentre la función inversa de f .

31. $f(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = 6 - x$

33. $f(x) = 4x + 7$

34. $f(x) = 3 - 5x$

35. $f(x) = \frac{x}{2}$

36. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

37. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

38. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

39. $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

40. $f(x) = 5 - 4x^3$

Funciones Periódicas

En la Figura 2.49 se observa la gráfica de la función.

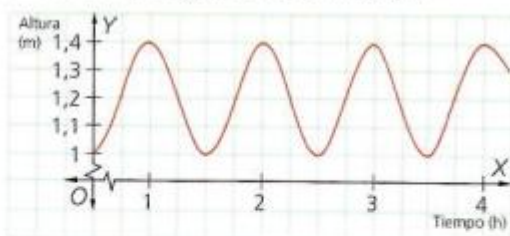


Figura 2.49

Los valores que toma esta función se repiten cada hora. Este tiempo que tarda en repetirse se denomina **periodo** y las funciones que tienen este comportamiento se llaman **funciones periódicas**.

Una función f es **periódica** si existe un número T que verifica que $f(x + T) = f(x)$, para todo x perteneciente al dominio de la función.

El menor número positivo T con esta propiedad se denomina **periodo**.

Ejemplo 1

Observa a continuación el estudio de la gráfica de la función $f(x) = \text{"Distancia de } x \text{ al entero más próximo"}$.

Esta función es periódica de periodo 1; por lo que cumple que $f(x + 1) = f(x)$ para todo x y para estudiarla basta con analizar el intervalo $[0, 1)$. En la Figura 2.50 se observa la gráfica de la función $f(x)$ en tal intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

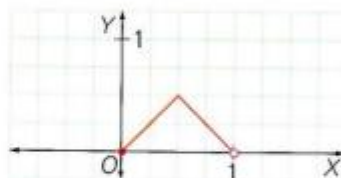


Figura 2.50

La gráfica de la función en todo $\mathbb{R}$ se representa en la Figura 2.51.

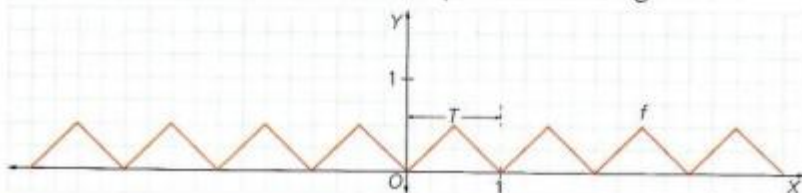


Figura 2.51

Ejemplo 2

Observa la representación de función $f(x) = (x - [x])^2$ para $x \geq 0$.

El periodo de esta función es $T = 1$, ya que $f(x + 1) = f(x)$. En consecuencia, se puede limitar el estudio al intervalo $[0, 1)$.

En dicho intervalo, la gráfica de la función asciende, corta cada uno de los ejes X y Y en el punto $(0, 0)$ y no es simétrica ni con respecto al eje Y (así que no es par) ni con respecto al origen (así que no es impar).

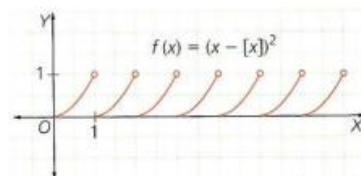


Figura 2.52

Taller N° 14: Funciones periódicas
Razonamiento

- 1 Indica si la función de la Figura 2.53 es periódica. En caso afirmativo, determina su periodo.

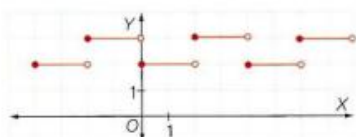


Figura 2.53

- 2 Observa la función periódica de periodo 5 en el intervalo $[-4, 4]$.

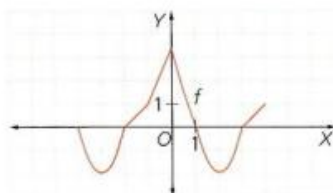


Figura 2.54

- a. ¿En qué puntos del intervalo $[-10, 15]$ cortará la gráfica al eje X?

- b. Estudia el signo de la función en el intervalo $[-6, 8]$.

- 3 La función $f(x)$ asocia a cada número real su parte decimal; por ejemplo, $f(2,6) = 0,6$; $f(-4,2) = 0,2$.

- a. Dibuja su gráfica.
- b. ¿Esta función es periódica? En caso afirmativo, indica su periodo.
- c. ¿Cuál es su dominio?

Resolución de problemas

- 4 Demuestra que si una función es periódica, de periodo T , se verifica que $f(x + 3T) = f(x)$.

Evaluación del aprendizaje

- ✓ En la Figura 2.55 se observa la función que describe el movimiento de un péndulo.

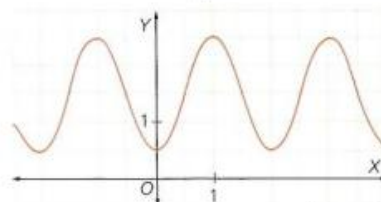


Figura 2.55

- a. ¿La función que modela este movimiento es periódica? Si lo es, ¿cuál es su periodo?
- b. ¿Para qué valores de t el péndulo alcanza su altura máxima?
- c. ¿Para qué valores de t el péndulo alcanza su altura mínima?

Estilos de vida saludable

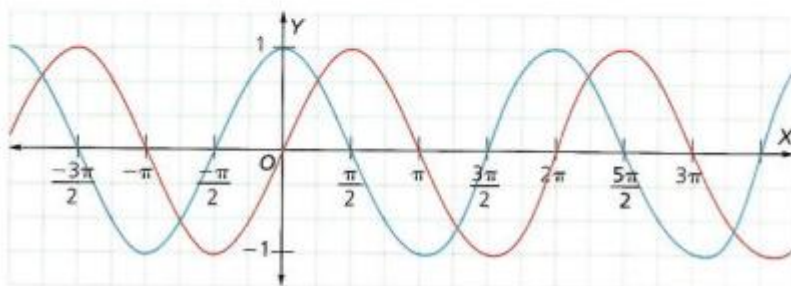
Cada vez que vas a dormir inicias un periodo de sueño en el que te recuperas y relajas física y mentalmente.

- Consulta en qué tiempo alcanzas una relajación mental y busca la gráfica que representa las etapas de un ciclo de sueño.

Funciones trigonométricas.
Funciones seno y coseno

Para la función $f(x) = \sin x$ se verifica que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ y para la función $g(x) = \cos x$ se cumple que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; por lo tanto, el periodo de las funciones trigonométricas seno y coseno es $T = 2\pi$ y basta representarlas en el intervalo $[0, 2\pi)$ para luego ir copiando cada trozo de la gráfica a ambos lados de dicho intervalo según el periodo.

En la Figura 2.56, la gráfica de color rojo corresponde a $f(x)$ y la de color verde corresponde a $g(x)$.



Función tangente

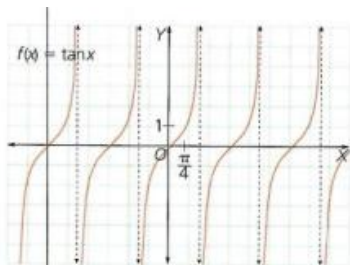


Figura 2.57

- Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ no está definida cuando $\cos x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k cualquier entero porque en dichos valores se anula el denominador, entonces su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.
- El recorrido de la función tangente es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y su periodo es $T = \pi$, pues $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.
- Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales.
- Es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan x$.

En la Figura 2.57 se observa la gráfica de la función tangente.

Función cotangente

- Como $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ no está definida cuando $\tan x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier entero su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.
- El recorrido de la función cotangente es $\mathbb{R}$.
- Su periodo es $T = \pi$.
- Las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales.
- Al igual que la tangente, se trata de una función impar.

La gráfica de la cotangente se observa en la Figura 2.58.

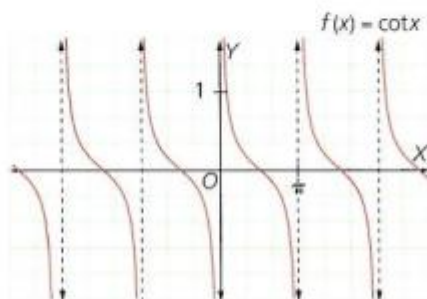


Figura 2.58

Función cosecante y secante

Al ser $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$, las propiedades de las funciones cosecante y secante se pueden deducir a partir de las propiedades de las funciones seno y coseno, respectivamente.

- La función cosecante no está definida cuando $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier número entero, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.

De forma análoga, la función secante no está definida si $\operatorname{cos} x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, siendo $k \in \mathbb{Z}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.

- El recorrido de ambas funciones es $\mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$.
- Su periodo es $T = 2\pi$.
- La función cosecante presenta asíntotas verticales en las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Las rectas $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales de la función secante.
- Son funciones simétricas. La función cosecante es impar, como el seno, mientras la función secante es par, como el coseno. Sus gráficas se observan en las figuras 2.59 y 2.60.

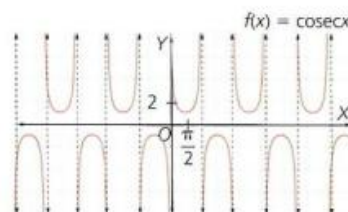


Figura 2.59

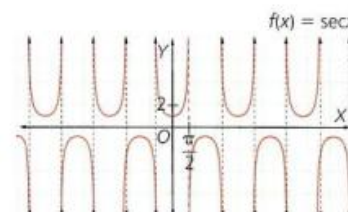


Figura 2.60

Taller N°15: Funciones trigonométricas.

1.

**Evaluación del aprendizaje**

- ✓ Dibuja la gráfica de cada una de las siguientes funciones trigonométricas y determina su dominio, su paridad, su periodo, sus asíntotas (si las tiene) y las intersecciones con los ejes de coordenadas.

a. $f(x) = -0,5\text{sen}x - 0,5$

b. $f(x) = (\text{sen}x + \text{cos}x)^2$

c. $f(x) = \left(\tan x - \frac{\pi}{2}\right)$

d. $f(x) = -\cot(x - \pi)$

e. $f(x) = 2|\text{sen}x| - 2$

f. $f(x) = \sec(x - \pi)$

- 2 Determina y escribe el periodo de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \text{sen}(4x)$

b. $f(x) = \cos(5x + \pi)$

c. $f(x) = \tan\left(\frac{x}{8}\right)$

d. $f(x) = \cot(2x)$

Modelación

- 3 Representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas. Para ello, primero determina su dominio, su recorrido, su periodo y sus puntos de corte con los ejes.

a. $f(x) = \text{sen}(3x)$

b. $f(x) = 5\text{cos}x$

c. $f(x) = \cot(2x)$

d. $f(x) = 2 + 3\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

e. $f(x) = \text{sen}x + \text{cos}x$

f. $g(x) = \text{sen}x - \text{sen}2x$

Sistema de cooredenadas polares.



Para determinar las coordenadas polares que se denotan por (r, θ) , del punto $(12, 5)$, dado en coordenadas cartesianas, se debe ubicar el punto P , construir el triángulo rectángulo correspondiente y hallar su hipotenusa junto el ángulo que forma con el eje X . Observa la Figura 2.61.

Después de construir el triángulo, se calcula la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras.

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$r = \sqrt{169} = 13$$

Como $\tan \theta = \frac{5}{12}$, entonces

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 22,6^\circ.$$

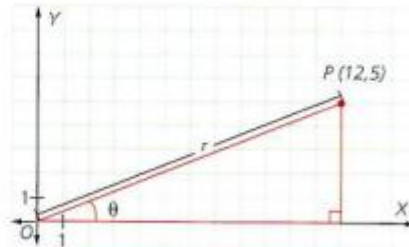


Figura 2.61

Por lo tanto, las coordenadas polares de P son $(13; 22,6^\circ)$ aproximadamente.

En **coordenadas polares** un punto $P(r, \theta)$ queda determinado por los números:

- r , que es la distancia del punto P al origen de coordenadas o **polo**, O .
- θ , que es el ángulo, en radianes y comprendido entre 0 y 2π , que forma el segmento OP con la parte positiva del eje X , denominado **eje polar**.

Las coordenadas del polo son $O(0, 0)$.

Conversión entre coordenadas cartesianas y polares



Si un punto tiene por coordenadas cartesianas $P(x, y)$ y por coordenadas polares $P(r, \theta)$, se puede establecer que:

$$P(r, \theta) = \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad P(x, y) = \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \theta \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin \theta \end{cases}$$

Las primeras coordenadas se utilizan para pasar de coordenadas cartesianas a polares, y las segundas, para pasar de polares a cartesianas.

Ejemplo 1

Observa cómo se hallan las coordenadas cartesianas del punto de coordenadas polares $P(3, \pi)$.

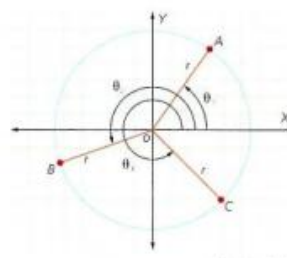
$$\begin{cases} x = r \cos \theta = 3 \cos \pi = -3 \\ y = r \sin \theta = 3 \sin \pi = 0 \end{cases} \rightarrow P(-3, 0)$$

Curvas en coordenadas polares

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas cartesianas.

Ejemplo 2

La gráfica de la ecuación polar $r = 3$ consta de todos los puntos que se encuentran a tres unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es un círculo que tiene su centro en el origen y radio 3. (Figura 2.62) Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación en coordenadas cartesianas: $x^2 + y^2 = 3^2$.



Taller N°16: Sistemas de coordenadas polares

Ejercitación

- 1 Halla las coordenadas polares de los siguientes puntos que tienen coordenadas cartesianas.

- | | |
|----------------------|-----------------------------|
| a. $P(1, -\sqrt{3})$ | b. $A(3, 3)$ |
| c. $C(-1, 0)$ | d. $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ |
| e. $D(3, -\sqrt{3})$ | f. $Q(-1, \sqrt{3})$ |

- 2 Pasa a coordenadas cartesianas los puntos que tienen por coordenadas polares.

- | | |
|----------------|----------------|
| a. $P(3, \pi)$ | b. $A(2, \pi)$ |
|----------------|----------------|

Resolución de problemas

- 5 Pasa la ecuación $r = \theta$ a la forma cartesiana y traza la gráfica correspondiente.
- 6 Transforma la ecuación $x^2 + y^2 = 4x$ a coordenadas polares. Explica el procedimiento.
- 7 Determina la nueva ecuación polar de la curva $r^2 \cos \theta \sin \theta = 8$, referida al mismo polo, pero cuando el eje polar gira un ángulo de 45° .



c. $Q\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

d. $B\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$

e. $C(0, 0)$

f. $D\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

Razonamiento

- 3 La gráfica de la ecuación polar $\theta = \frac{\pi}{3}$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje X positivo. Confirma este hecho utilizando la relación $\tan\theta = \frac{y}{x}$ para obtener la ecuación en coordenadas cartesianas.
- 4 Halla la ecuación en coordenadas cartesianas de $r = \sec\theta$. Para ello, recuerda que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

Evaluación del aprendizaje

- i Determina las coordenadas polares del vértice D del hexágono regular de la Figura 2.63, tomando como polo el punto (0, 0) y como eje polar el rayo OC = 1.

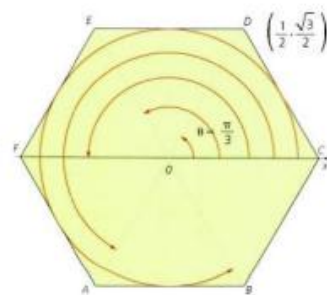


Figura 2.63

-ACTIVIDADES Y ESTRATEGIAS:

Explicación de los temas correspondientes al período, los estudiantes deben realizar las preguntas.

Realizaran tareas asignadas, para poder aplicar los conceptos y que ellos tengan rutinas de estudio.

La guía permite que ellos estén siempre al día en los temas si faltan y realizar talleres estudiar los temas.

[file:///C:/Users/Martha/Downloads/Libro.Pre_Calculo_-_James_Stewart%20\(5\).pdf](file:///C:/Users/Martha/Downloads/Libro.Pre_Calculo_-_James_Stewart%20(5).pdf)

[Se pueden apoyar en el siguiente texto](#)

<https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf>

RECURSOS MATERIALES:

Guías didácticas

Libro virtual

<https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf>

videos.



<https://www.problemasyecuaciones.com/funciones/polinomica/problemas-resueltos-funcion-constante-lineal-cuadratica-cubica-cortes.html>

EVALUACIÓN:

Las clases parte fundamental del proceso, estar atentos y cumplir con las normas.

Realizar los talleres propuesto en la guía para estudiar y fortalecer la temática.

Apoyarse de las clases para resolver los talleres, junto con los compañeros.

Cada uno se debe comprometer con su proceso de aprendizaje, con su responsabilidad.

Se realizan talleres individuales y en grupos.

Evaluaciones individuales para confrontar sus saberes.

