

**UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - PERIODO TRES- GRADO 10°****TEMA:****GEOMETRÍA ANALÍTICA****OBJETIVOS**

- ✓ Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- ✓ Reconocer las coordenadas polares y cartesianas como herramientas de localización de puntos y lugares geométricos.
- ✓ Reconocer la posibilidad de nominar un punto en otro sistema de coordenadas denominado coordenadas polares.
- ✓ Relacionar el uso de coordenadas polares y cartesianas a partir de la nominación de un punto.
- ✓ Identificar los elementos y características de las secciones cónicas
- ✓ Representar gráficamente e interpretar las distintas situaciones.

REQUISITOS PREVIOS:

- ✓ Representación de puntos y segmentos en el plano cartesiano.
- ✓ Concepto de proporcionalidad.
- ✓ Teorema de Pitágoras.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
✓ Coordenadas polares y cartesianas. ✓ Distancia entre dos puntos. ✓ Punto medio de un segmento. ✓ Inclinación y pendiente. ✓ La línea recta. Ecuación	✓ Participa del trabajo individual y en familia de una manera comprometida y responsable. ✓ Utiliza las herramientas tecnológicas como fuente de información, para complementar los conocimientos.	✓ Demuestra interés por aprender. ✓ Desarrolla y practica las actividades propuestas en la unidad didáctica. ✓ Propone estrategias para la construcción y apropiación del conocimiento.



- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">✓ Posiciones relativas de dos rectas en el plano.✓ Secciones cónicas.✓ Circunferencia, ecuación | <ul style="list-style-type: none">✓ Resuelve situaciones problema aplicando los conceptos vistos.✓ Consigna los contenidos de la unidad didáctica de manera coherente y cohesiva.✓ Plantea estrategias para mejorar los procesos fundamentales.✓ Desarrolla las actividades propuestas en la unidad didáctica y supera sus insuficiencias cognitivas.✓ Leer cuidadosamente la unidad didáctica. | <ul style="list-style-type: none">✓ Presenta sus trabajos en forma oportuna y responsable.✓ Asume una actitud de confianza frente a las propias capacidades para la comprensión de la unidad didáctica. |
|---|---|--|

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

- ✓ Explicación de los conceptos con dos o tres ejemplos.
- ✓ Permitir la participación de los estudiantes durante las clases, para desarrollar los conceptos, aclarar sus dudas.
- ✓ Talleres en forma individual y en grupo.
- ✓ Actitud en clase, se tiene en cuenta también la excusa cuando faltan a clase, comprometerse frente a la norma, mantener guardado el celular durante la clase.
- ✓ Evaluación individual y en grupo.
- ✓ Usar la guía para los talleres y conceptos.
- ✓ DEBEN COPIAR EN EL CUADERNO LAS ACTIVIDADES, SERAN CALIFICADAS COMO NOTA DE SEGUIMIENTO, PARA VERIFICAR EL USO DE LA GUÍA.

Coordenadas polares y cartesianas**Introducción**

La necesidad del ser humano de ubicarse en el planeta y en sus respectivas regiones, lo ha llevado a crear sistemas que le permitan hacer una “localización” efectiva. En nuestra ciudad conocemos un sistema de calles y carreras que nos permite llegar a determinado punto, en el planeta con los meridianos y paralelos podemos ubicar un lugar en específico. Anteriormente hemos visto que el plano cartesiano nos permite ubicar puntos en el plano, la pregunta que surge es ¿son estas las únicas maneras de ubicar puntos?



Actividad introductoria: ¿Y cómo hacían los piratas?



Revisa las instrucciones que están junto con el mapa pirata y resuelve las preguntas:



"Desde el punto de desembarco, caminar 500 pasos al sur, luego 200 pasos al oriente, 150 pasos al norte, 300 pasos al nor-oriente (pegado a la playa..."

Y con esto observamos que llegamos del punto verde (desembarco) al punto azul

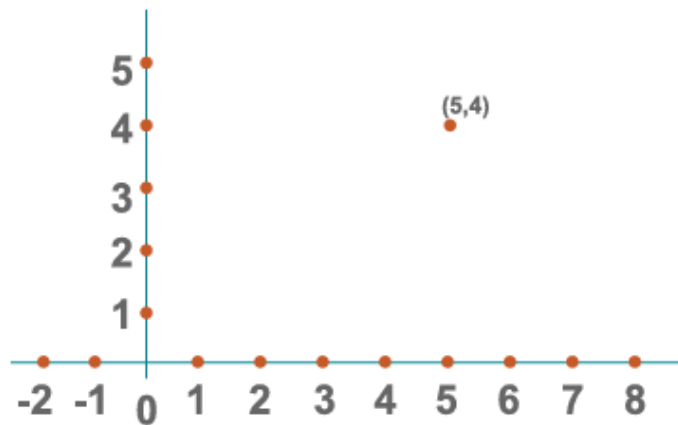
Actividad 1: Reconociendo la forma de ubicar.



Contesta la pregunta y compara las respuestas con tus compañeros.

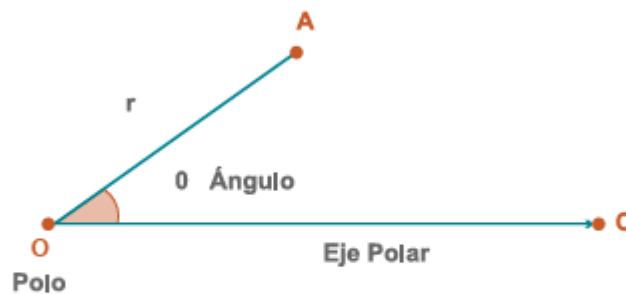
1. Con estas instrucciones ¿se puede llegar exactamente al tesoro o podemos llegar a diferentes lugares del mapa?

2. ¿Encontrar un punto en el mapa de piratas es lo mismo que encontrar un punto en el plano cartesiano? ¿cuáles son las diferencias y las similitudes?



3. ¿En qué se parece y en qué se diferencia encontrar un punto en el plano cartesiano, y encontrar un punto en el mapa de piratas?

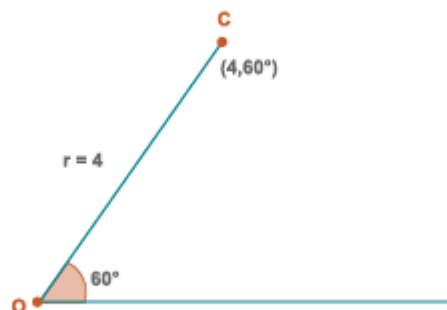
Coordenadas polares:



El punto A se determina por la pareja ordenada (r, θ) .

r es la distancia del polo (O) al punto A.

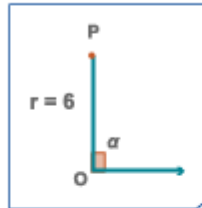
θ es el ángulo formado entre el eje polar y el segmento que va desde el polo al punto.



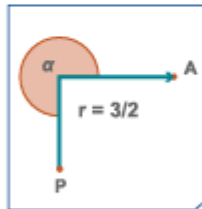
Este punto C tiene como coordenadas polares $(4, 60^\circ)$ ya que está a una distancia de cuatro unidades del polo, y el ángulo formado entre el eje polar y el segmento OC es de 60° .



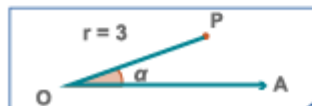
Une con una línea el punto con sus respectivas coordenadas polares.



$(1.5, 260^\circ)$



$(3, 15^\circ)$



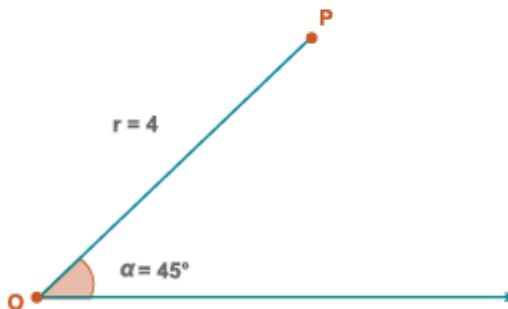
$(6, \pi/2)$

Actividad 2: De cartesianas a polares y viceversa.



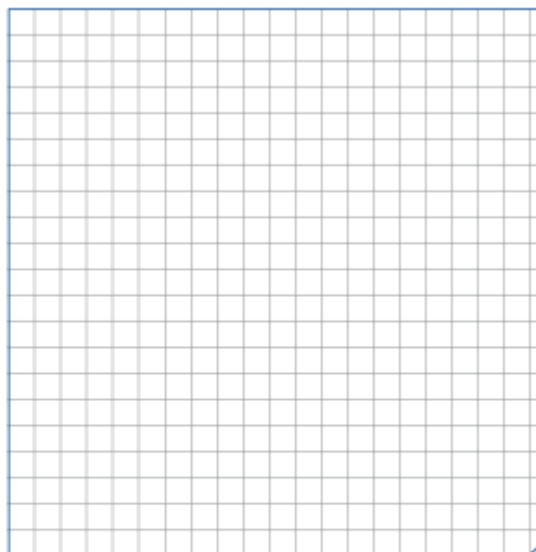
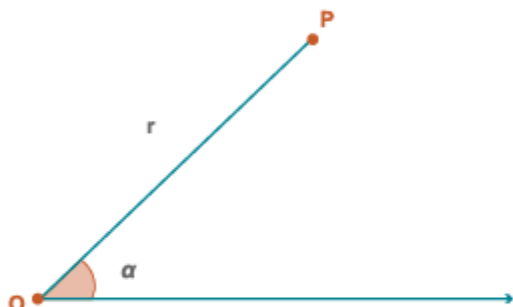
Responde:

1. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares del punto P? Coordenadas polares $(4, 45^\circ)$





2. Ahora piénsalo en general. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares del punto P?



Encontrar las coordenadas rectangulares de los siguientes puntos:

A(4,120°)

B(4,3 /2)

C(2,-90°)

Conversión de coordenadas

En algunos casos es necesario realizar conversiones entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares.

Las expresiones para convertir punto en coordenadas cartesianas (x,y) a polares (r,θ) son :

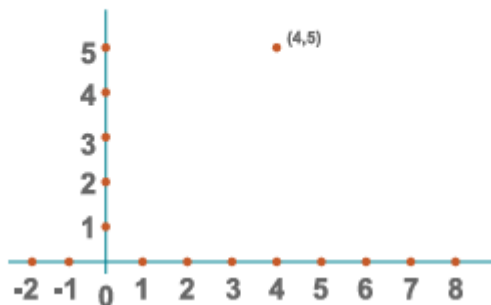
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Las expresiones para convertir punto en coordenadas polares (r,θ) a cartesiana (x,y) son :

$$x = r\cos\theta \text{ y } y = r\sin\theta$$



Ahora pensemos en el proceso inverso, dadas las coordenadas rectangulares de un punto, ¿cómo encontramos sus coordenadas polares?

**Ejercicios:**

Encontrar las coordenadas polares de los siguientes puntos:

$$A(1, -\sqrt{3})$$

$$B(3, -5)$$

$$C(-3.5, 0)$$

Graficarlo.

**Resumen**

Une mediante una línea los conceptos relacionados en ambas columnas:

Fórmulas para pasar de
polares a rectangulares

El punto se ubica de
acuerdo a los valores
en x y en y

Fórmulas para pasar de
rectangulares a polares

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\emptyset = \text{arco tangente } (y/x)$$

Coordenadas polares

El punto se ubica
conociendo la
distancia y el ángulo

Coordenadas
rectangulares

$$X = r \cos \emptyset$$
$$Y = r \sin \emptyset$$

Ejercicios



Realiza los siguientes puntos:

1. Consulta cuáles funciones son más sencillas de representar mediante coordenadas polares.
2. Dados los siguientes puntos en coordenadas polares y rectangulares, encontrar sus coordenadas en el otro sistema de representación estudiado.

$$(1, 135^\circ)$$

$$(-2, 210^\circ)$$

$$(-3, 5\pi/6)$$

$$(3\sqrt{2}, 135^\circ)$$

$$(-2, 3)$$

$$(3, -2)$$

Geometría analítica

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos P y Q con la misma ordenada la distancia entre $P(x_1, y)$ y $Q(x_2, y)$, es:

$$PQ = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Dados dos puntos P y Q con la misma abscisa, la distancia entre $p(x, y_1)$ y $Q(x, y_2)$, es:

$$PQ = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

Distancia entre dos puntos cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Punto medio de un segmento

Dado un segmento de extremos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, Para encontrar el punto medio, se es la semisuma de sus coordenadas.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

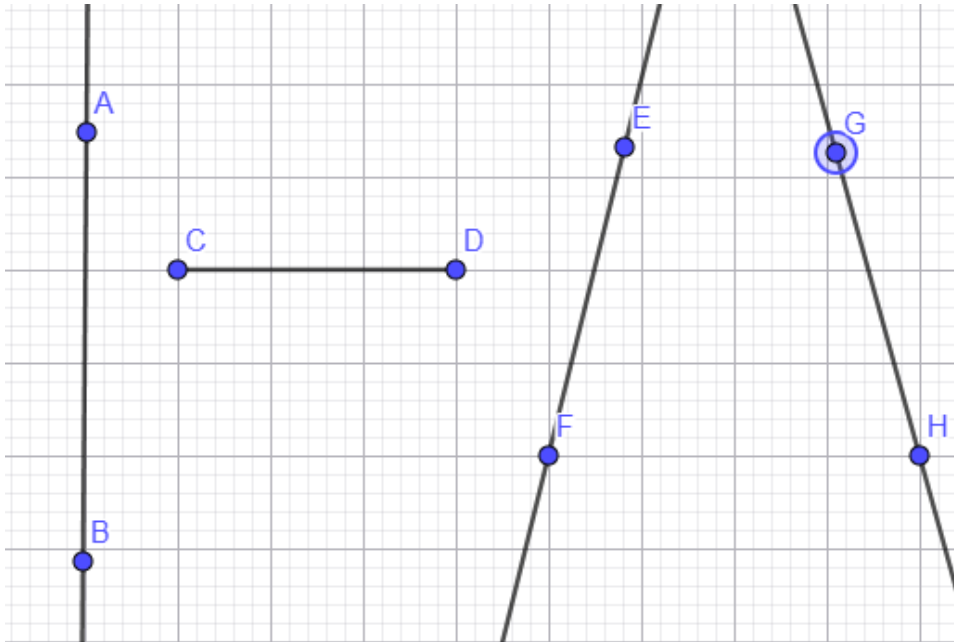
Ejemplo 1

Hallar el punto medio M del segmento $\overline{AB}$, donde $A(-14, 54)$ y $B(46, 100)$,

se calculan

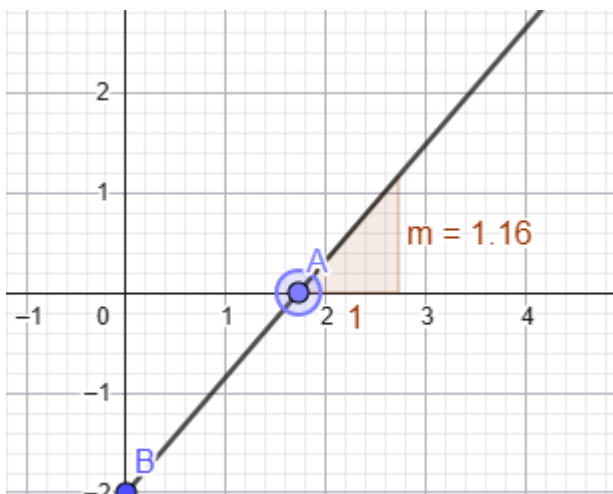
$$M\left(\frac{-14+46}{2}, \frac{54+100}{2}\right) = M(16, 87)$$

Inclinación y pendiente



- a. La recta que pasa por los puntos AB, tiene pendiente 90° , es decir infinita, su ecuación es $x = \text{una constante}$
- b. La recta que pasa por los puntos DC. Tiene pendiente cero, su ecuación es un valor real constante, $y = \text{constante}$.
- c. La ecuación que pasa por los puntos EF, tiene pendiente positiva.
- d. La ecuación que pasa por los puntos GH, tiene pendiente negativa.

Pendiente de una recta



La pendiente de la recta, desplazamiento horizontal sobre desplazamiento vertical.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

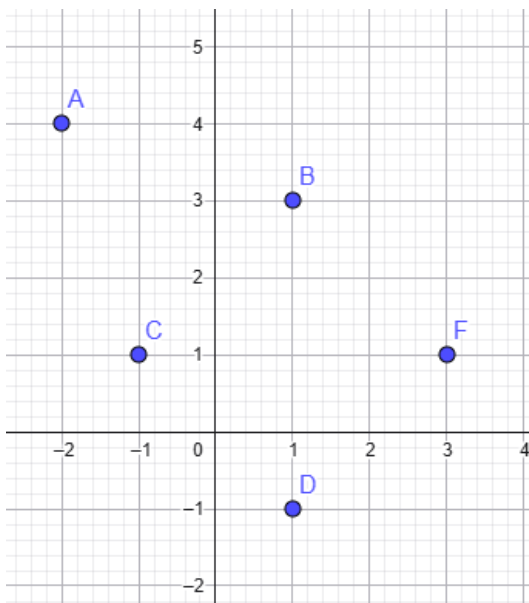


También con el triángulo que se visualiza, $m = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$

Es decir. $m = \tan \beta$

Taller N°1

1. Encuentra la distancia entre el punto P (7,-6) al origen del plano cartesiano.
2. Observa el plano y determina la distancia entre el par de puntos indicados en cada caso.



- a. d (A, C)
- b. d (B, F)
- c. d (C, D)
- e. d (A, F)

3. Grafica los puntos, únelos siguiendo el orden alfabético y halla el perímetro de la figura resultante.

A (1,3) B (-1,2) C (-3,2) D (0,-1) E (1,1) F (3,1)

4. Halla la pendiente de cada recta, dada su inclinación.

- a. $\beta = 12^\circ$
- b. $\beta = 35^\circ$
- c. $\beta = 170^\circ$

5. Halla el ángulo de inclinación de cada recta, dada su pendiente.



a. $m = -2$

b. $m = \frac{1}{2}$

c. $m = -0,3$

La línea recta

La expresión $y = mx + b$, recibe el nombre de ecuación cartesiana de la recta, la expresión algebraica que relaciona las coordenadas (x, y) de los puntos P que pertenecen a la recta. Donde **m** es la pendiente y **b** es el valor en el que la recta interseca al eje y.

Ejemplo

La recta cuya pendiente es $m = -\frac{2}{5}$ y el intersepto en y(b) es 2,

Se reemplaza $y = \frac{-2}{5}x + 2$

Ecuación de una recta dados dos puntos.

Dados los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2) ,

Hallamos primero la pendiente y luego usamos cualquiera de los puntos usando punto pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y luego usamos la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo:

Dados los puntos **(3, -2)** y **(-2, 1)** Hallar la ecuación que pasa por esos puntos

Primero encontramos la pendiente:

$$m = \frac{-2 - 1}{3 - (-2)} = \frac{-3}{5}$$

Ahora la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$

Con $m = \frac{-3}{5}$, y el punto **(3, -2)**

$$y - (-2) = \frac{-3}{5}(x - 3)$$

$$5(y + 2) = -3x + 9$$

$$5y + 2 + 3x - 9 = 0$$

$$3x + 5y - 7 = 0$$

Ecuación general de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$

Con A y B diferentes de cero



Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales

Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 Son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 \times m_2 = -1,$$

Es decir, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ejemplo:

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de

Un triángulo rectángulo.

Solución:

Encontramos La pendiente entre cada par de puntos para determinar si son perpendiculares.

Pendiente entre los puntos PR y QR,

$$\text{Pendiente de PR } m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Pendiente de QR } m_2 = \frac{5-17}{11-8} = \frac{-12}{3} = -4$$

Multiplicar las pendientes da -1, luego son perpendiculares, es decir, es un triángulo rectángulo.

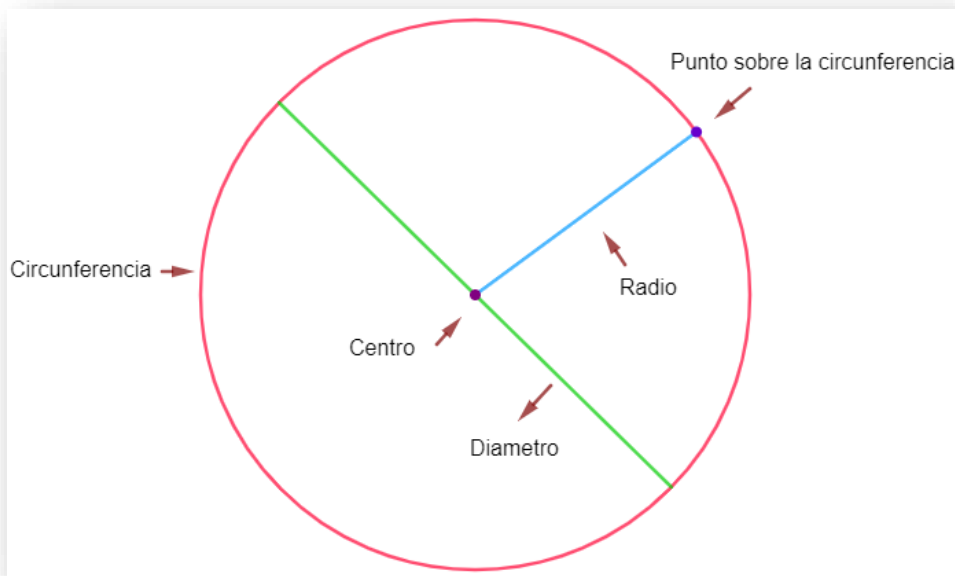
Taller N°2

1. Dados los puntos $(-2, 5)$ y $(10, 0)$, graficarlos en el plano coordenado, Determine la distancia entre ellos, encuentre el punto medio.
2. Grafique las rectas que pasan por $(0, 0)$ y que tienen pendientes $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ y 3
3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-2, -11)$; es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$
4. Grafique la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$
5. Utilice las pendientes para demostrar que A $(1, 1)$, B $(7, 4)$, C $(5, 10)$ y D $(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

La Circunferencia

Se llama circunferencia al lugar geométrico los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, denominado **centro**, es constante. A dicha distancia constante se le conoce como **radio**

Elementos de la circunferencia



Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0)

En una circunferencia con centro $C(0, 0)$, radio r y $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia se cumple que la distancia entre los puntos C y P es igual al radio.

Si se utiliza la fórmula de la distancia, se tiene que:

$$d(C, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene la ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0).

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ejemplo

Si se quiere hallar la ecuación de la circunferencia representada a continuación, primero se identifica que el centro de la circunferencia es (0, 0) y el valor del radio es 4. Luego, se reemplazan estos valores en la ecuación canónica.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$4^2 = x^2 + y^2$$

$$16 = x^2 + y^2$$

La ecuación canónica de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 16$.

Ejemplo: Para comprobar que $P(-3, 4)$ pertenece a la circunferencia de ecuación



$x^2 + y^2 = 25$, se reemplaza la coordenada (x, y) en la ecuación canónica por las coordenadas de P y se verifica que se cumpla la igualdad.

$$x^2 + y^2 = (-3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

Como al reemplazar la coordenada del punto P en la ecuación se satisface la igualdad, entonces el punto pertenece a la circunferencia.

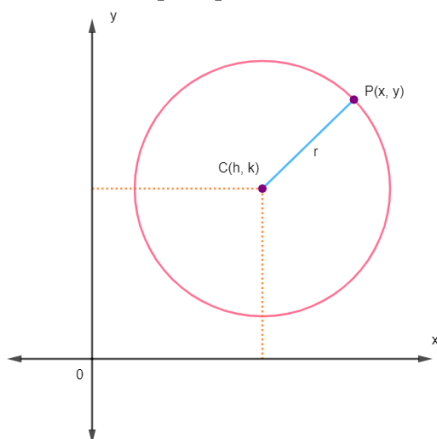
Actividad N°2: Tema La circunferencia con centro en (0,0)

Actividad

- Representa cada circunferencia en el plano:
 - $x^2 + y^2 = 81$
 - $x^2 = -y^2 + 4$
 - $x^2 + y^2 = 2$
- Halla la ecuación canónica de cada circunferencia de acuerdo con las condiciones dadas y sabiendo que el centro es $(0, 0)$
 - $r = 6$
 - $r = \sqrt{5}$
 - $r = 23$
 - Pasa por el punto $(-4, 2)$
 - Pasa por el punto $(0, -7)$
 - Pasa por el punto $(6, -3)$
- Verifica en cada caso si el punto P pertenece a la circunferencia dada:
 - $P(4, 2); x^2 + y^2 = 20$
 - $P(6, -6); x^2 + y^2 = 72$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)

En una circunferencia con centro C (h, k) , radio r y P (x, y) un punto cualquiera sobre la circunferencia se cumple que la distancia entre los puntos C y P es igual al radio.



Por lo tanto, $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$.



Para encontrar la distancia entre los puntos C y P, se utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d(C, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

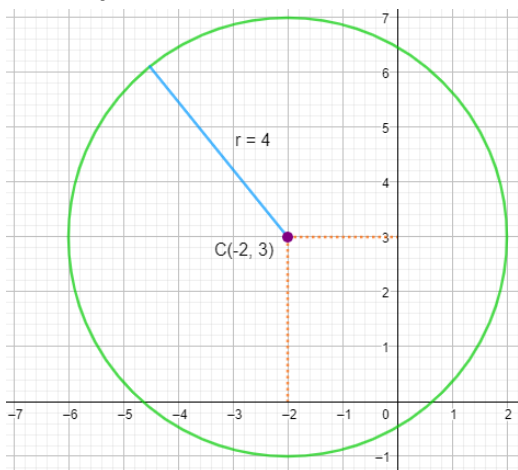
$$\text{Por lo tanto, } r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene la **ecuación canónica** de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ejemplo

Para determinar la ecuación canónica de la circunferencia con centro C(-2, 3) y radio 4, se sustituyen los valores de las coordenadas del centro (h=-2, k=3), y el valor del radio (r=4) en la ecuación canónica.



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

En la siguiente figura se representa la circunferencia:

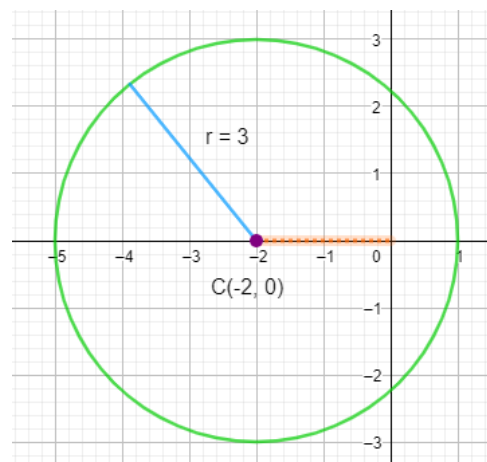
Ejemplo: Para hallar el valor del radio y las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación canónica es $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$, se expresa como 5^2 . En la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 5^2$ se identifican los valores $h = 4$, $k = -2$ y $r = 5$. Por lo tanto, el centro de la circunferencia es (4, -2) y el radio es 5.

Ejemplo: A fin de determinar la ecuación canónica de la circunferencia representada a continuación, se sustituyen los valores de las coordenadas del centro ($h = -2$ y $k = 0$) y el radio ($r = 3$) en la ecuación canónica.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

$$(x + 2)^2 + y^2 = 9$$





Por lo tanto, la ecuación canónica de la circunferencia representada en la figura es:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 9$$

Actividad N°3: Tema La circunferencia con centro en (h, k)

Actividad

1. Halla el radio y las coordenadas del centro de las circunferencias. Luego, gráficalas.
 - a. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$
 - b. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{7}$
 - c. $x^2 + (y + 4)^2 = 9$
2. Verifica, en cada caso, si el punto P pertenece a la circunferencia dada:
 - a. P (2, 3); $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 - b. P (-1, 2); $(x - 1)^2 + y^2 = 9$