UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - PERIODO DOS- GRADO 10°

TEMA: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVOS

- ✓ Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- ✓ Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- ✓ Resolver triángulos rectángulos aplicando razones trigonométricas
- ✓ Resolver triángulos no rectángulos, aplicando ley de seno y coseno.
- ✓ Graficar las funciones trigonométricas.

REQUISITOS PREVIOS:

- ✓ Conjuntos numéricos.
- ✓ Clasificación de triángulos.
- ✓ Propiedades de los triángulos.
- ✓ Teorema de Pitágoras.
- ✓ Desigualdad triangular.
- ✓ Medición de ángulos en grados y radianes.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
✓ Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. ✓ Razones trigonométricas de ángulos notables. ✓ Resolución de triángulos rectángulos. ✓ Ángulos de elevación y ángulo de depresión. ✓ Aplicaciones a triángulos rectángulos. ✓ Teorema del seno ✓ Teorema del coseno. ✓ Graficas trigonométricas.	✓ Participa del trabajo individual y en familia de una manera comprometida y responsable. ✓ Utiliza las herramientas tecnológicas como fuente de información, para complementar los conocimientos. ✓ Resuelve situaciones problema aplicando los conceptos vistos. ✓ Consigna los contenidos de la unidad didáctica de manera coherente y cohesiva.	✓ Demuestra interés por aprender. ✓ Desarrolla y practica las actividades propuestas en la unidad didáctica. ✓ Propone estrategias para la construcción y apropiación del conocimiento. ✓ Presenta sus trabajos en forma oportuna y responsable. ✓ Asume una actitud de confianza frente a las propias capacidades para la comprensión de la unidad didáctica.

- ✓ Plantea estrategias para mejorar los procesos fundamentales.
- ✓ Desarrolla las actividades propuestas en la unidad didáctica y supera sus insuficiencias cognitivas.
- ✓ Leer cuidadosamente la unidad didáctica.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

- ✓ Explicación de los conceptos con dos o tres ejemplos.
- ✓ Permitir la participación de los estudiantes durante las clases, para desarrollar los conceptos, aclarar sus dudas.
- ✓ Talleres en forma individual y en grupo.
- ✓ Actitud en clase, se tiene en cuenta también la excusa cuando faltan a clase, comprometerse frente a la norma, mantener guardado el celular durante la clase.
- ✓ Evaluación individual y en grupo.
- ✓ Usar la guía para los talleres y conceptos.
- ✓ DEBEN COPIAR EN EL CUADERNO LAS ACTIVIDADES, SERAN CALIFICADAS.COMO NOTA DE SEGUIMEINTO, PARA VERIFICAR EL USO DE LA GUÍA.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTANGULO

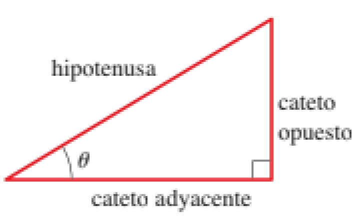


Figura 1

Relaciones trigonométricas

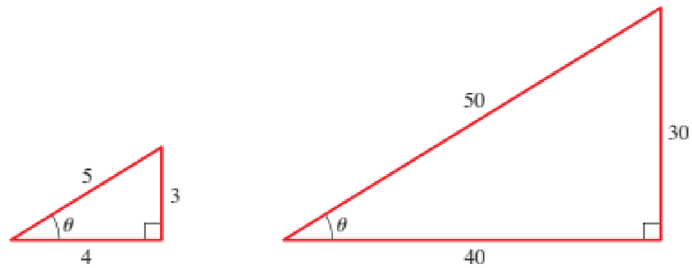
$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Los símbolos que se usan para estas relaciones son abreviaturas para sus nombres completos: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente.** Puesto que dos triángulos rectángulos con ángulo θ son similares, estas relaciones son las mismas,

Hiparco (cerca de 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para una función estrechamente relacionada con la moderna función seno y evaluó ángulos a intervalos de medio grado. Estas son consideradas las primeras tablas trigonométricas. Utilizó sus tablas sobre todo para calcular las trayectorias de los planetas por el cielo.

sin importar el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ (véase la figura 2).



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

Figura 2

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 45°

Explora

En un triángulo rectángulo isósceles, los dos catetos tienen la misma longitud y los dos ángulos agudos son congruentes e iguales a 45° (Figura 1).

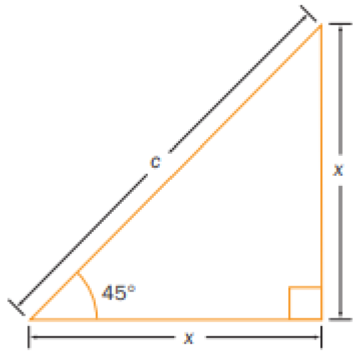


Figura 1

- Calcula los valores de sen45°, cos45° y tan45°.

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide:

$$c = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

De acuerdo con las definiciones de las razones trigonométricas, para el ángulo de 45° se tiene que:

$$\text{sen}45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan 45° = \frac{x}{x} = 1$$

A partir de la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, es posible calcular los valores correspondientes a los **ángulos especiales** tales como **45°**, **30°** y **60°**.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30° Y 60°

La altura de un triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos cuyos catetos menores corresponden a la mitad del lado, como se muestra en la Figura 2.

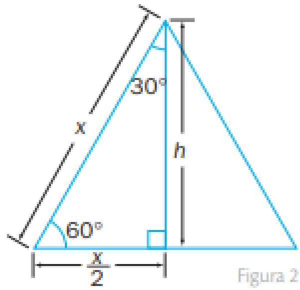


Figura 2

La medida de la altura es:

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Así, las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$\text{sen}60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}; \tan 60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Por su parte, las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$\text{sen}30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}; \cos 30° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan 30° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ACTIVIDAD N°1. COPIAR EL SIGUIENTE EJEMPLO Y EL PROBLEMA,EN EL CUADERNO.

Figura 3

Ejemplo 1

Para calcular la altura del triángulo de la Figura 3, si se sabe que uno de los ángulos agudos mide el doble que el otro, se procede como sigue.

Sea α la medida del ángulo agudo de menor amplitud y h la altura del triángulo, entonces:

$$90° + \alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\cos 30° = \frac{h}{5{,}5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5{,}5} \Rightarrow h = 4{,}76 \text{ m}$$

Resolución de problemas

1 Un faro de 45 m de altura ilumina un barco con un rayo de luz que forma un ángulo de 30° con la horizontal (Figura 4). ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?

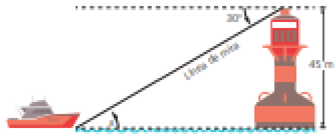


Figura 4

Solución:

Sea x la distancia del barco al faro, se tiene que:

$$\tan 60° = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot \tan 60° = 45 \cdot \sqrt{3} = 77{,}94\text{ m}$$

Por tanto, el barco se encuentra a 77,94 m del faro.

Ten en cuenta

La civilización egipcia fue una de las primeras en aplicar la trigonometría en sus construcciones arquitectónicas.

TALLER N°1

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1.

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
			$\sqrt{3}$
30°			

Tabla 1

3 Determina la medida de la altura del triángulo ABC de la Figura 5.

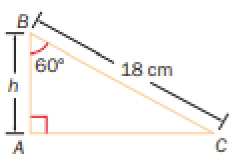


Figura 5

Comunicación

4 Contesta estas preguntas.

a. Si el $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿cuál es la medida del ángulo α?

b. Si el $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, ¿de qué ángulo se trata?

c. Si la $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ¿cuánto mide el ángulo β?

5 Calcula la medida de los ángulos del triángulo de la Figura 6.

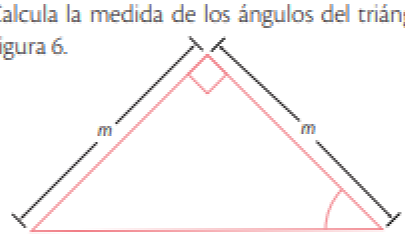


Figura 6

Razonamiento

6 Indica cuál es la relación entre cada par de valores.

a. $\operatorname{sen}60°$ y $\cos 30°$

b. $\cos 60°$ y $\operatorname{sen}30°$

c. $\tan 60°$ y $\tan 30°$

Ejercitación

7 Calcula el valor de cada expresión.

a. $\operatorname{sen}45° + \operatorname{sen}60°$

b. $\operatorname{sen}30° + \cos 60°$

c. $\tan 45° - (\cos 60° + \operatorname{sen}30°)$

d. $\tan 30° \cdot \tan 60° \cdot \tan 45°$

e. $\operatorname{sen}45° + \frac{1}{2}\cos 45°$

f. $3\cos 60° - 2\operatorname{sen}30°$

g. $\frac{\tan 30° + \tan 60°}{1 + \tan 30° \cdot \tan 60°}$

Resolución de problemas

8 En un triángulo rectángulo ABC, $\measuredangle A = 45° = \measuredangle C$. Si la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto mide cada cateto?

9 ¿Qué distancia separa a dos carros A y B que se desplazan sobre una vía, uno al encuentro del otro, si un hombre con binoculares, situado a 200 m de la vía, observa al auto A con un ángulo de 30° y al auto B con un ángulo de 45°?

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Explora

Observa la Figura 1.

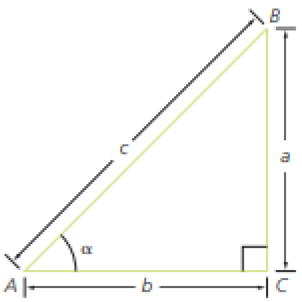


Figura 1

- Haz uso del teorema de Pitágoras para demostrar las siguientes relaciones trigonométricas:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Según la información representada en la Figura 1, por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$. Así, dividiendo por c^2, se obtiene:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ o}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Como $\text{sen}\alpha = \dfrac{a}{c}$ y $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, entonces:

$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

La anterior expresión es equivalente a la igualdad:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Esta relación es la **identidad fundamental de la trigonometría**.

Asimismo, se verifica que:

$$\frac{\textbf{sen}\alpha}{\textbf{cos}\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \textbf{tan}\alpha$$

Si se dividen los dos miembros de esta ecuación por $\cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \mathbf{\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Para cualquier ángulo agudo α de un triángulo rectángulo se verifica que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ten en cuenta

$(\text{sen}\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha$

$(\text{sen}\alpha)^2 \neq \text{sen}\alpha^2$

Ejemplo 1

ACTIVIDAD N°2. COPIAR LOS EJEMPLOS 1, 2 Y EJERCICIO EJERCITACIÓN.

Ejemplo 1

Para calcular los valores del coseno y la tangente de un ángulo agudo α, si se conoce que $\text{sen}\alpha = 0{,}6$, se puede utilizar la identidad fundamental como sigue.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (0{,}6)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}64} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$$

Por su parte:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}75$$

Ejemplo 2

Se puede calcular el valor de la tangente de un ángulo agudo α, si se sabe que el valor del coseno es 0,5, como se muestra a continuación.

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{(0{,}5)^2}$$
$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{0{,}25} - 1$$
$$\Rightarrow \tan^2\alpha = 3$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}$$

Ejercitación

1 Calcula el valor del seno y la tangente de un ángulo agudo α, si el coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Apóyate en la información de la Figura 2.

Solución:

Si se aplica la ecuación fundamental, resulta que:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{7}{9} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Por su parte, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

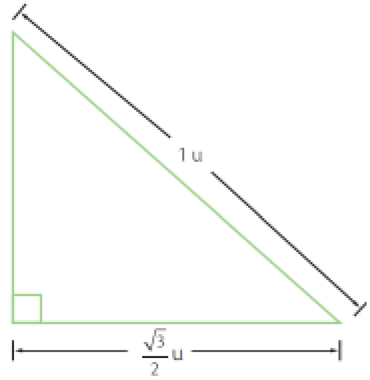


Figura 2

TALLER N°2

Ejercitación

2 Calcula, en cada caso, las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo si se conoce que:

a. $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

b. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

c. $\tan\alpha = \sqrt{5}$

d. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

e. $\tan\alpha = 5$

f. $\cos\alpha = 0{,}8$

Comunicación

3 Completa la Tabla 1 con valores aproximados.

senα	0,92		
cosα			0,12
tanα		0,75	

Tabla 1

4 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la Tabla 2 ($\alpha < 90°$).

senα	$\frac{1}{3}$		
cosα		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
tanα			2

Tabla 2

Razonamiento

5 Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea $-\frac{1}{2}$ y halla las restantes razones trigonométricas.

6 Aplica la identidad fundamental de la trigonometría y simplifica las expresiones.

a. $(\text{sen}\alpha + 1)(\text{sen}\alpha - 1)$

b. $\cos^2\alpha\,(\tan^2\alpha + 1)$

c. $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

d. $\tan\alpha \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} - \text{sen}\alpha\right)$

7 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a. $\tan^2\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha$

b. $\dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\tan\alpha} = 1 - \text{sen}^2\alpha$

c. $(1 + \tan^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$

Resolución de problemas

8 Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones trigonométricas (senα, cosα y tanα) y es válida para todos los valores del ángulo. Demuestra que la expresión $2\text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha = 0$ no es una identidad.

9 Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros se habrán descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Explora

El ángulo α de la Figura 1 está situado en posición normal, es decir, su vértice coincide con el origen del plano cartesiano.

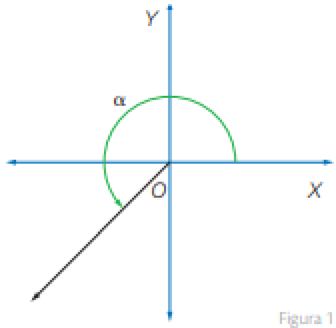


Figura 1

- Si se sabe que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuáles son los valores de **senα** y **tanα**?

Las definiciones de seno, coseno y tangente se pueden extender a un ángulo cualquiera haciendo uso de un sistema de coordenadas cartesianas y una circunferencia de centro O y radio $r = 1$ denominada **circunferencia goniométrica**.

Cada ángulo α determina un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia goniométrica. El radio y las coordenadas de este punto forman un triángulo rectángulo, tal que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}, \text{ con } x \neq 0$$

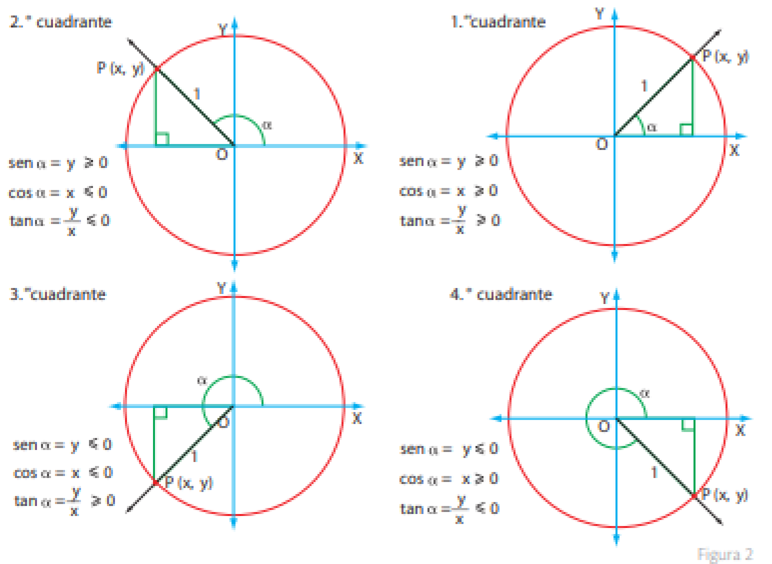


Figura 2

Ten en cuenta

sen 90° = 1

cos 90° = 0

tan 90° no existe (Figura 3).

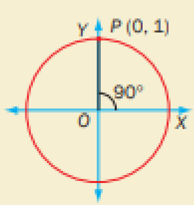


Figura 3

Así, para calcular los valores senα y tanα para el ángulo α de la Figura 1, se puede hacer el siguiente razonamiento.

- Como α pertenece al tercer cuadrante, entonces $\operatorname{sen}\alpha \leq 0$ y $\tan\alpha \geq 0$. Al aplicar la identidad fundamental, se tiene que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Por otra parte:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 1$$

Las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia, ya que los triángulos rectángulos determinados por el ángulo α son semejantes entre sí. Además, como $r = 1$, se cumple que:

$$|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1 \qquad |\cos\alpha| \leq 1$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS Y DE UN ÁNGULO QUE DIFIERE EN 180°

Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$

Los ángulos α y $180^\circ - \alpha$ son suplementarios, por lo que:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$

ACTIVIDAD N°3. COPIAR LOS EJEMPLOS 1, 2,3 Y EJERCICIO EJERCITACIÓN.

Ejemplo 1

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al eje de ordenadas (Figura 4).

$y' = y \Rightarrow \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$x' = -x \Rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

Ángulos que difieren en 180°: α y $180^\circ + \alpha$

Los ángulos α y $180 + \alpha$ difieren en 180°, por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$$

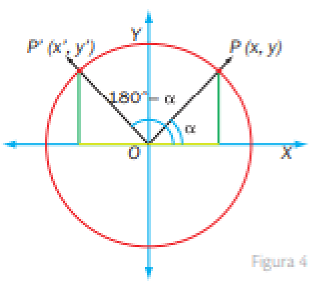


Figura 4

Ejemplo 2

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al origen de coordenadas (Figura 5).

$y' = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$x' = -x \Rightarrow \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

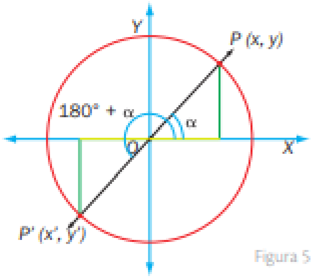


Figura 5

Ejemplo 3

- Para hallar la razones trigonométricas de 135º, se tiene en cuenta que 135º y 45º son ángulos suplementarios; es decir:

$$\operatorname{sen}135° = \operatorname{sen}(180° - 45°) = \operatorname{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$$

- Estas son las razones trigonométricas del ángulo 210º = 180º + 30º.

$$\operatorname{sen}210° = \operatorname{sen}(180° + 30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS OPUESTOS Y DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.

Ten en cuenta

En la práctica, se toma el semieje positivo de las abscisas como lado inicial de los ángulos de giro. El sentido es positivo si es contrario al de las agujas del reloj, o negativo si tiene el mismo sentido que las agujas del reloj.

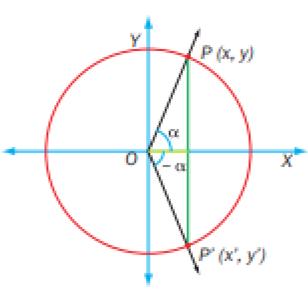


Figura 6

Ángulos opuestos: α y $-\alpha$

Los ángulos α y $-\alpha$ son opuestos, por lo que:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

ACTIVIDAD N°4. EJEMPLOS 4, 5. EJERCITACIÓN.

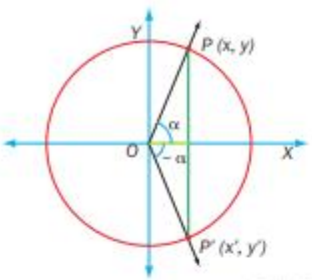


Figura 6

Ejemplo 4

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al eje de abscisas (Figura 6).

$y' = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

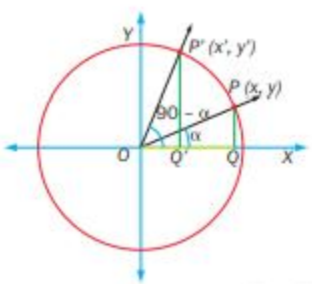
$x' = x \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

Ángulos complementarios: α y $90° - \alpha$

Los ángulos α y $90° - \alpha$ son complementarios, por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$



Ejemplo 5

Los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OP'Q'$ de la Figura 7 son congruentes.

$y' = x \Rightarrow \operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$x' = y \Rightarrow \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Ejercitación

1. Calcula las razones trigonométricas de 330º.

- **Solución:**

Al trazar el ángulo 330º en posición normal (Figura 8) se observa que su lado terminal coincide con el ángulo $-30°$. Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}330° = \operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330° = \tan(-30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

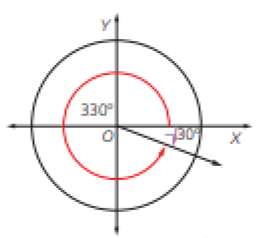


Figura 8

TALLER N°3

Ejercitación

2 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a. π b. $270°$
c. $150°$ d. $225°$
e. $\frac{2\pi}{3}$ f. $\frac{3\pi}{4}$
g. $135°$ h. $240°$
i. $\frac{\pi}{4}$ j. $\frac{5\pi}{6}$
k. $-120°$ l. $\frac{5\pi}{2}$
m. $-300°$ n. $\frac{5\pi}{3}$
ñ. $-225°$ o. $\frac{\pi}{2}$

3 Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ b. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ c. $\cos\frac{3\pi}{4}$
d. $\cos\frac{2\pi}{3}$ e. $\tan\frac{3\pi}{4}$ f. $\tan\frac{5\pi}{6}$

4 Calcula los valores para los siguientes ángulos negativos.

a. $\operatorname{sen}(-60°)$ b. $\cos(-45°)$
c. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ d. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
e. $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ f. $\tan(-30°)$

Comunicación

5 Halla las otras dos razones trigonométricas de un ángulo α, tal que $\tan\alpha = 4$.

Razonamiento

6 Halla el valor de los ángulos que se muestran en las Figuras 9 y 10.

a.

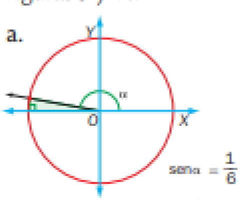


Figura 9

b.

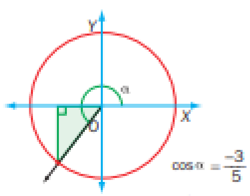


Figura 10

7 Calcula los valores que se piden, si α es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}64$.

a. $\operatorname{sen}(180° - \alpha)$ b. $\cos(90° - \alpha)$
c. $\operatorname{sen}(-\alpha)$ d. $\operatorname{sen}(180° + \alpha)$

8 Halla, en cada caso, las otras dos razones trigonométricas del ángulo α.

a. Si $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$ y $180° \leq \alpha \leq 270°$
b. Si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{9}{10}$ y $270° \leq \alpha \leq 360°$
c. Si $\tan\alpha = -\sqrt{8}$ y $90° \leq \alpha \leq 180°$

9 Encuentra las razones trigonométricas de estos ángulos si se sabe que $\cos\alpha = \frac{10}{11}$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$.

a. $\alpha + \pi$ b. $2\pi - \alpha$
c. $\pi - \alpha$ d. $\frac{\pi}{2} - \alpha$

10 Halla las razones trigonométricas de los ángulos suplementario y opuesto de α, si $\tan\alpha = -\sqrt{15}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

Resolución de problemas

Resolución de problemas

11 En la Figura 11 aparece dibujado el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.

En esta se consideran dos ángulos α y β tales que la amplitud del segundo es igual a la del primero aumentada en un 50%.

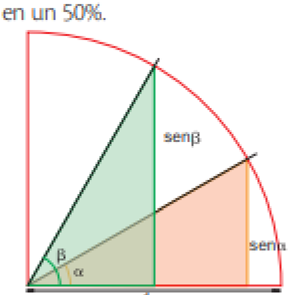


Figura 11

a. Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si $\alpha = 30°$. Determina en qué porcentaje aumentó el seno de β en relación con el de α.

b. ¿En qué porcentaje aumenta el seno de β si el ángulo α mide $60°$?

c. ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas en las que aparecen una o más razones trigonométricas de la incógnita.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Indica la medida de todos los ángulos x que cumplen que $\operatorname{sen} x = 0{,}5$.

Solución:

Para resolver ecuaciones trigonométricas con ayuda de la calculadora, se pueden digitar estas secuencias:

SHIFT sin SHIFT cos SHIFT tan

En este caso, se digita:

SHIFT sin 0 . 5

Se obtiene 30°, pero como $\operatorname{sen} x > 0$, se sabe que x es la medida de ángulos que pertenecen al primer o segundo cuadrante, es decir, $x = 30°$ o $x = 150°$. Además, las razones trigonométricas de un ángulo y todos los que se expresan como un número entero de vueltas más este son iguales (Figura 2).

Así: $x = 30° + 360°k$, con $k \in \mathbb{Z}$, y $x = 150° + 360°k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

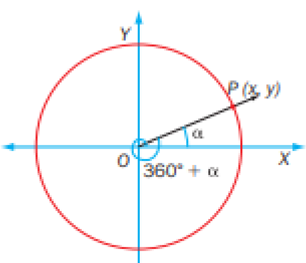


Figura 2

ACTIVIDAD N°5. USAR GEOGEBRA Y APLICAR.

MatemaTICS

Construye ángulos en la circunferencia goniométrica con GeoGebra

Para trazar ángulos en la circunferencia goniométrica y conocer su medida —sin importar en cuál cuadrante se encuentre su lado terminal—, se pueden utilizar algunas de las herramientas de la barra principal de GeoGebra, como se muestra a continuación.

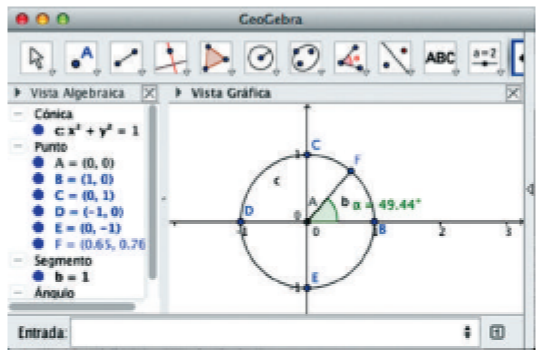
- En el menú selecciona la opción *Circunferencia* (centro, radio). Haz clic sobre el punto (0, 0) y, en el cuadro de diálogo en el que se pide introducir el radio, digita 1. De esta manera obtienes la circunferencia goniométrica.

  En la barra de Entrada, introduce, uno a la vez, los puntos de corte de la circunferencia con los ejes: B=(1,0), C=(0,1), D=(−1,0) y E=(0,−1).

- Selecciona el menú . Luego, haz clic sobre un punto de la circunferencia en el primer cuadrante. Este punto se nombra automáticamente como F. Para desplazarlo, selecciónalo con el puntero .

- En el menú selecciona la opción *Segmento* y traza los segmentos BA y AF en el orden que indican las letras. Para medir el ángulo BAF, en el menú selecciona la opción *Ángulo*. Haz clic en los tres puntos en el orden B, A y F. Verifica que la medida del ángulo BAF aparece en color verde.

- Selecciona el punto F y muévelo libremente. Observa cómo varía la medida del ángulo, según en donde se encuentre el punto F.



TALLER N°4

Ejercitación

2 Halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos con ayuda de la calculadora.

a. 275° b. 124° 16′
c. 1,5 rad d. $\frac{2\pi}{5}$ rad
e. −120° f. −π rad

Comunicación

3 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a. $\tan x = -1$ b. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\operatorname{sen} x = 0$ d. $\cos x = -0{,}7561$
e. $\operatorname{sen} x = 1$ f. $\cos x = 0$

4 Soluciona las ecuaciones trigonométricas que se proponen. Expresa los resultados en grados.

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $1 - \cos x = 0$
c. $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\tan x = -1$

5 Soluciona las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a. $\tan x = -2$ b. $2 - 5\cos x = 6$
c. $\operatorname{sen} x = -1$ d. $\tan x = 1$

Resolución de problemas

6 Si α es un ángulo agudo tal que $\cos\alpha = 0{,}2$, ¿cuál es el valor de la $\tan\alpha$?

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Ejemplo 1

En el triángulo rectángulo de la Figura 2, se observa que m∡$A = 90°$, $a = 5$ cm y $b = 4$ cm. Para determinar la medida del cateto c, la medida de los ángulos y el área del triángulo, se puede proceder de la siguiente manera.

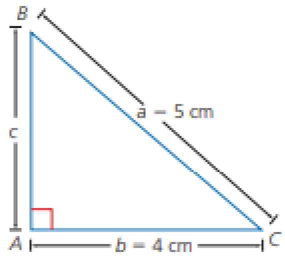


Figura 2

- Por el teorema de Pitágoras, se cumple que:
  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 4^2$
  $\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ cm
- $\cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
  Por lo tanto, $C = \arccos 0{,}8 = 36°\,52'\,12''$.
- Dado que, m∡A + m∡B + m∡$C = 180° \Rightarrow$ m∡B + m∡$C = 90°$
  $\Rightarrow$ m∡$B = 90° -$ m∡C
  $\Rightarrow$ m∡$B = 90° - 36°\,52'\,12''$
  $\Rightarrow$ m∡$B = 53°\,7'\,48''$
- Finalmente el área es $\dfrac{bc}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6\ \text{cm}^2$.

TALLER N°5

Ejercitación

2 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los triángulos rectángulos de las Figuras 10 a 15.

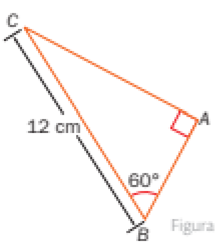
a.


Figura 10

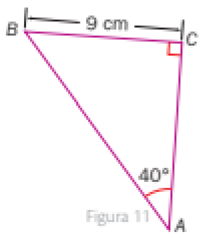
b.


Figura 11

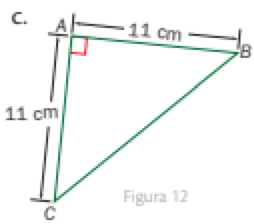
c.


Figura 12

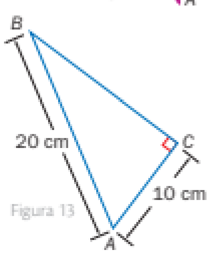
d.


Figura 13

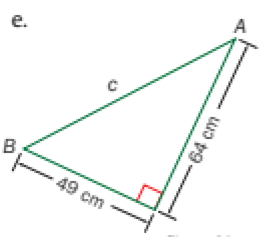
e.


Figura 14

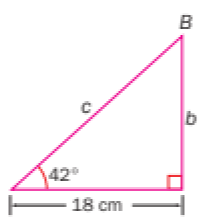
f.


Figura 15

Razonamiento

3 Responde estas preguntas. Razona tus respuestas.

a. ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?

b. ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo dos de su ángulos? ¿Por qué?

Comunicación

4 Lee y resuelve.

Un **ángulo de depresión** es el que se forma entre la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por debajo de la horizontal.

Desde la cima de un faro de 8 m de altura se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8º. Observa cómo se representa la situación en la Figura 16.

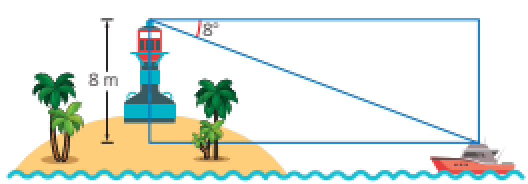


Figura 16

Calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro en ese mismo instante.

5 Halla la longitud de los lados de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6,4 cm y 3,6 cm, respectivamente.

6 Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 cm, si la proyección de uno de los catetos sobre ella mide 4 cm.

7 Halla las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de los catetos miden 4 cm y 2 cm, respectivamente.

8 Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y la distancia desde su pie hasta los extremos en un triángulo rectángulo, en el cual los catetos miden 6 cm y 8 cm.

9 Calcula la medida del lado de un rombo en el que la diagonal mayor mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26°.

10 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre la misma.

11 Halla la medida de los ángulos del trapecio rectángulo de la Figura 17.

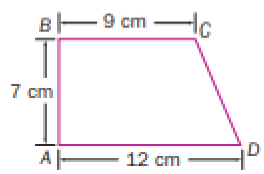


Figura 17

Resolución de problemas

12 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida.

a. ¿Cómo es el triángulo?

b. ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

13 Usa el teorema de la altura para proponer cómo se podría construir un segmento cuya longitud sea media proporcional entre dos segmentos de 4 cm y 9 cm. ¿Cómo se podría construir si los segmentos son de *a* cm y *b* cm?

14 De un triángulo rectángulo se conoce que su hipotenusa mide 20 cm y la suma de los catetos mide 24 cm. ¿Cuánto mide su área?

15 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 m y 27 m. ¿Cuál es la longitud de la altura del triángulo con respecto a la hipotenusa?

16 Para medir la distancia entre dos puntos, *A* y *B*, muy alejados se situaron dos personas sobre ellos. Una tercera persona está en un punto *C*, a 50 m de distancia de *A*, como se observa en la Figura 18

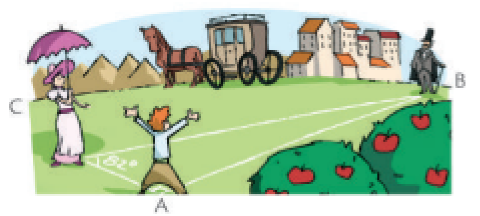


Figura 18

¿Cuál es la distancia que separa los puntos *A* y *B*?

17 Juan subió en un globo aerostático hasta una altura de 50 m. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo, como aparece en la Figura 19.

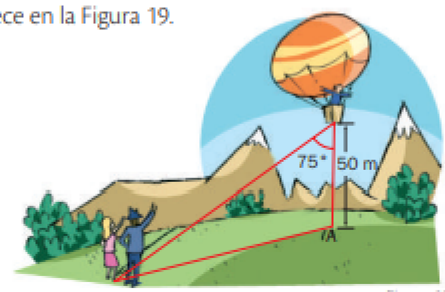


Figura 19

a. ¿A qué distancia del punto *A* se encuentran los padres de Juan?

padres de Juan?

b. Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60°, ¿a cuántos metros de altura se encontraría el globo en ese momento?

18 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 m. ¿Cuánto mide la altura del árbol?

19 Unas cigüeñas construyeron su nido sobre el tejado de un edificio a 25 m del suelo. Un niño lo observa desde un punto situado a 50 m del edificio. Calcula el ángulo de observación.

TALLER DE REPASO

Medida de ángulos

Ejercitación

1. Completa la Tabla 1.

Grados	Radianes
135°	
175°	
235°	
330°	
360°	

Tabla 1

Razones trigonométricas de triángulos rectángulos

Ejercitación

2. Halla las razones trigonométricas de cada triángulo rectángulo de las Figuras 1 a 4.

a.

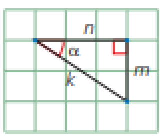


Figura 1

b.

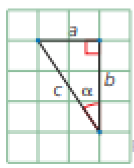


Figura 2

c.

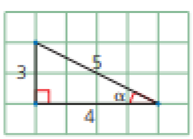


Figura 3

d.

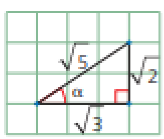


Figura 4

3. Halla el valor de la hipotenusa y las razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a.

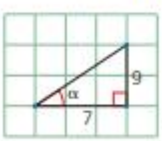


Figura 5

b.

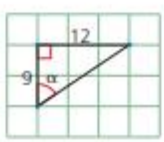


Figura 6

Comunicación

4. Lee y resuelve.

Si $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$ y $\cos\beta = \frac{12}{13}$:

a. Representa el triángulo rectángulo y ubica los valores correspondientes.

b. Calcula la razón trigonométrica tangente para el ángulo β.

c. Calcula las razones trigonométricas para el otro ángulo agudo del triángulo.

Razones trigonométricas de ángulos especiales

5. Encuentra el valor *x* en cada triángulo.

a.

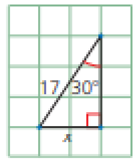


Figura 7

b.

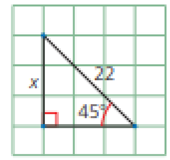


Figura 8

c.

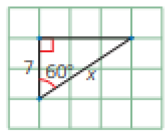


Figura 9

d.

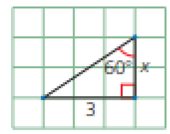


Figura 10

e.

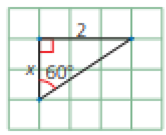


Figura 11

f.

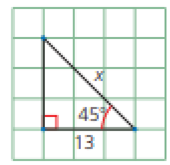


Figura 12

6. Evalúa cada expresión utilizando las razones trigonométricas de los ángulos especiales.

a. $\operatorname{sen}30° + \cos 60°$

b. $\tan 45° + \sec 60°$

c. $\cos 45° - \cos 30°$

d. $\operatorname{sen}30° \cdot \cos 30°$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolución de problemas

7. Resuelve la siguiente situacion.

- Si la sombra del árbol de la Figura 13 es de 12 m, halla su altura.

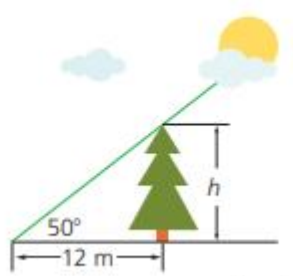


Figura 13

ACTIVIDAD N°6

Razonamiento

1 Determina la longitud del lado y de la apotema de un octágono regular inscrito en una circunferencia de 49 mm de radio. Halla su área.

Solución:

Según la información proporcionada, el polígono se puede representar como en la Figura 4.

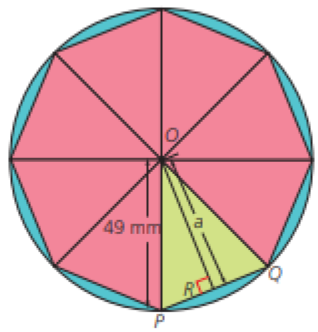


Figura 4

Como el octágono es regular, entonces se deduce que:

$$m\measuredangle POQ = \frac{360°}{8} = 45°$$

Dado que la apotema a divide al $\measuredangle POQ$ en dos ángulos congruentes y forma un ángulo recto con el lado del octágono, entonces:

$$\measuredangle QOR = 22{,}5°$$

Así, $\operatorname{sen} 22{,}5° = \frac{PR}{49} \Rightarrow PR = 49 \cdot \operatorname{sen} 22{,}5° = 18{,}75$ mm.

Además, $PQ = 2PR$, por lo cual, el lado del octágono es:

$$PQ = 2 \cdot 18{,}75° = 37{,}5 \text{ mm}$$

Para determinar la apotema, se tiene en cuenta que:

$$\cos 22{,}5° = \frac{a}{49} \Rightarrow a = 49 \cdot \cos 22{,}5° = 45{,}27 \text{ mm}$$

Por último, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(8 \cdot 37{,}5) \cdot 45{,}27}{2} = 6\,790{,}5 \text{ mm}^2$$

TALLER N°6

Ejercitación

2 Calcula el área y el perímetro de los polígonos que se presentan en las Figuras 5 y 6.

a.

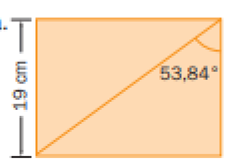


Figura 5

b.

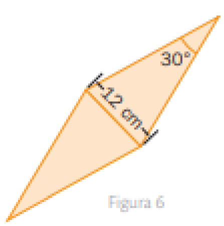


Figura 6

Comunicación

3 Calcula la longitud de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en un octágono regular cuyo lado mide 12 m.

4 Halla el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

5 Halla el perímetro y el área de un rectángulo en el que la diagonal mide 28,84 dm y forma con la base un ángulo de 33° 41′ 24″.

Resolución de problemas

6 En la Figura 7 se muestra el plano de un terreno con forma de paralelogramo.

a. ¿Cuál es el área del terreno?

b. Si se quiere cercar el terreno con tres vueltas de alambre, ¿qué cantidad se necesita?

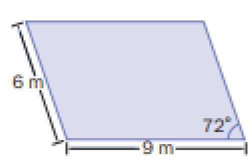


Figura 7

GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS.

La gráfica de una función nos proporciona una mejor idea de su comportamiento. De este modo, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones se grafican en la sección siguiente.

Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno primero observemos que dichas funciones repiten sus valores según un patrón. Para ver exactamente cómo sucede esto, recuerde que la circunferencia de un círculo unitario es 2π. Se infiere entonces que el punto $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Puesto que las funciones seno y coseno se definen en términos de las coordenadas de $P(x, y)$ se infiere que sus valores no cambian al añadir cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras

$$\text{sen}(t + 2n\pi) = \text{sen}\, t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Por lo tanto, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la definición siguiente. Un función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. Tal número positivo mínimo, si es que existe, es el **periodo** de f. Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es **un periodo completo** de f.

Propiedades periódicas del seno y el coseno

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\, t \qquad\qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

seno y coseno para t entre 0 y 2π.

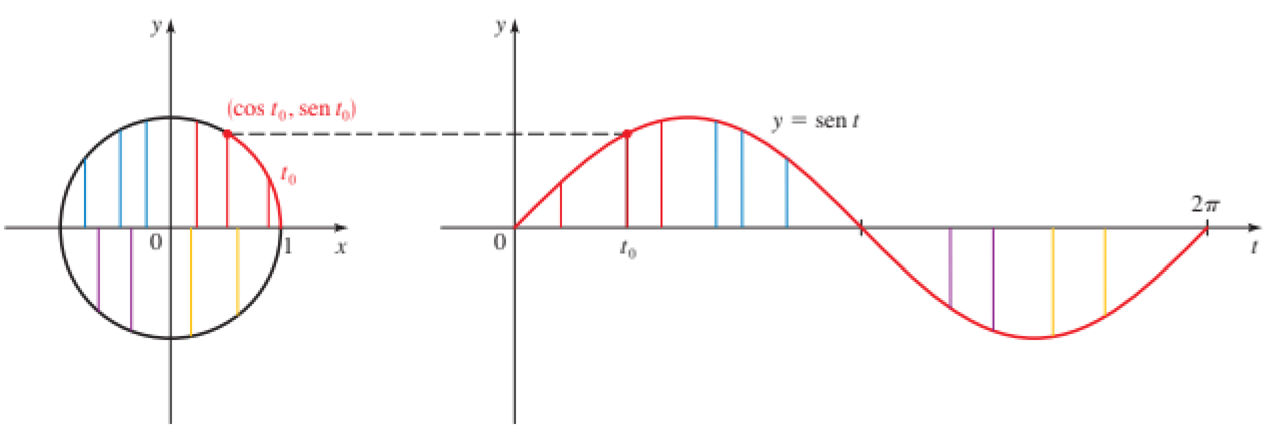


Figura 1

Para trazar la gráfica con mayor exactitud, determinamos otros pocos valores de sen t y cos t en la tabla 2. Podríamos determinar más valores con la ayuda de una calculadora.

calculadora.

Tabla 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

TALLER N°7

1–14 ■ Grafique la función.

1. $f(x) = 1 + \cos x$

2. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$

3. $f(x) = -\operatorname{sen} x$

4. $f(x) = 2 - \cos x$

5. $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$

6. $f(x) = -1 + \cos x$

7. $g(x) = 3 \cos x$

8. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

9. $g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

10. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$

11. $g(x) = 3 + 3 \cos x$

12. $g(x) = 4 - 2 \operatorname{sen} x$

13. $h(x) = |\cos x|$

14. $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

15–26 ■ Determine la amplitud y el periodo de la función, y dibuje su gráfica.

15. $y = \cos 2x$

16. $y = -\operatorname{sen} 2x$

17. $y = -3 \operatorname{sen} 3x$

18. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

19. $y = 10 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

20. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$

21. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$

22. $y = 4 \operatorname{sen}(-2x)$

23. $y = -2 \operatorname{sen} 2\pi x$

24. $y = -3 \operatorname{sen} \pi x$

25. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$

26. $y = -2 + \cos 4\pi x$

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

Propiedades periódicas

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

GRÁFICA DE LA TANGENTE Y COTANGENTE

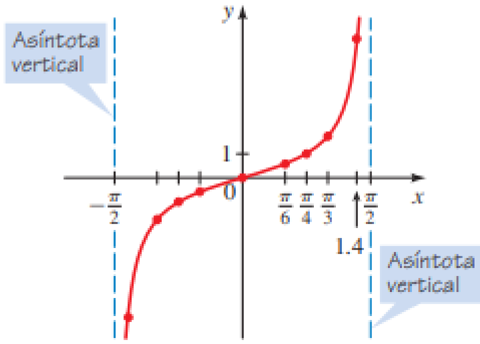


Figura 1
Un periodo de $y = \tan x$

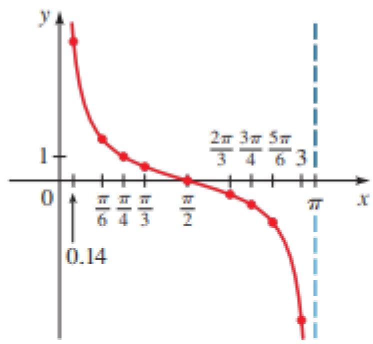


Figura 2
Un periodo de $y = \cot x$

GRÁFICA DE LA SECANTE Y COSECANTE

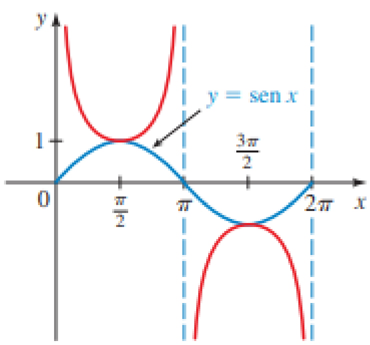


Figura 3
Un periodo de $y = \csc x$

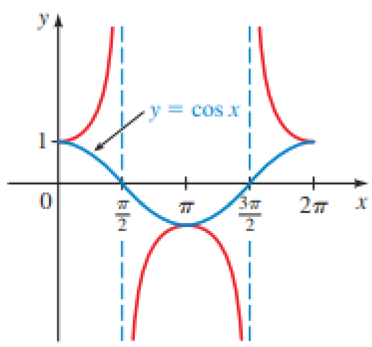
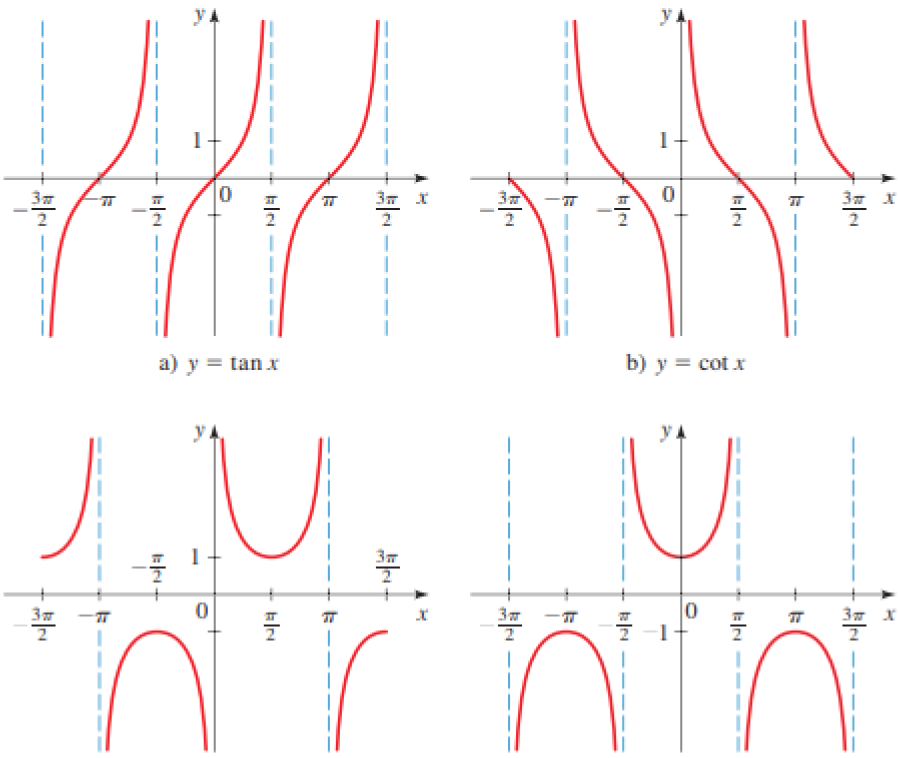


Figura 4
Un periodo de $y = \sec x$



a) $y = \tan x$

b) $y = \cot x$

c) $y = \csc x$

d) $y = \sec x$

TALLER N°8. GRÁFICAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES

7. $y = 4 \tan x$

8. $y = -4 \tan x$

9. $y = -\frac{1}{2} \tan x$

10. $y = \frac{1}{2} \tan x$

11. $y = -\cot x$

12. $y = 2 \cot x$

13. $y = 2 \csc x$

14. $y = \frac{1}{2} \csc x$

15. $y = 3 \sec x$

16. $y = -3 \sec x$

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

19. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

20. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

EJEMPLO 1

a) Exprese sen θ en términos de cos θ.

b) Exprese tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el cuadrante II.

Solución

a) A partir de la primera identidad pitagórica se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el cuadrante I o II, entonces sen θ es positivo y, en consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el cuadrante III o IV, sen θ es negativo y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

b) Puesto que tan θ = sen θ/cos θ, se necesita escribir cos θ en términos de sen θ. Por el inciso a)

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

y puesto que cos θ es negativo en el cuadrante II, aquí se aplica el signo negativo. Así,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$$

EJEMPLO 2

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el cuadrante III, encuentre $\cos\theta$.

Solución 1 Se necesita escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, se obtiene $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el cuadrante III, $\sec\theta$ es negativa, por lo tanto

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Así

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

LEY DE LOS SENOS

La **ley de los senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

Ley de los senos

En el triángulo ABC se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Ejemplo 1 Rastreo de un satélite (LAA)

Un satélite que orbita la Tierra pasa directamente arriba de las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, apartadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, su ángulo de elevación es observado de manera simultánea como 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿Qué tan lejos está el satélite de Los Ángeles? En otras palabras, encuentre la distancia AC en la figura 4.

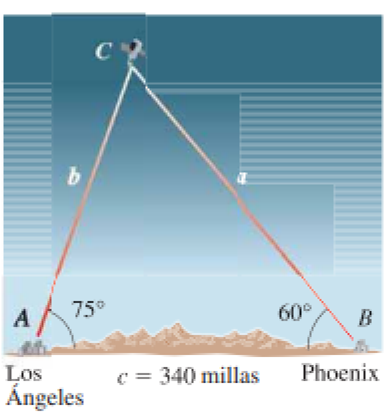


Figura 4

Solución Siempre que dos ángulos en un triángulo se conocen, el tercer ángulo se puede determinar de inmediato porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En este caso, $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (véase la figura 4), por lo tanto se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Resuelva para } b$$

La distancia del satélite desde Los Ángeles es aproximadamente 416 millas. ■

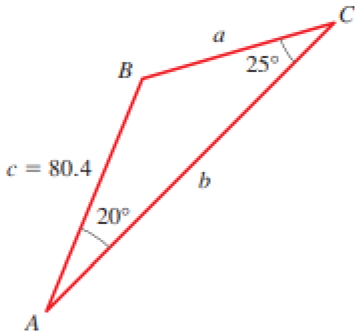


Figura 5

Ejemplo 2 Resolver un triángulo (LLA)

Resuelva el triángulo de la figura 5.

Solución Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Puesto que se conoce el lado c, para hallar el lado a se usa la relación

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

De manera similar, para encontrar b utilizamos

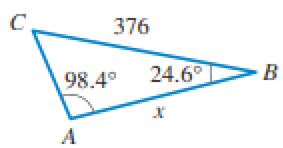
$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 135°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

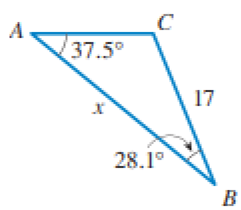
TALLER N°9

1–6 ■ Use la ley de los senos para hallar el lado indicado x o el ángulo θ.

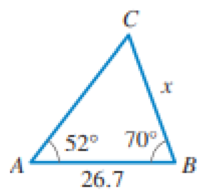
1.



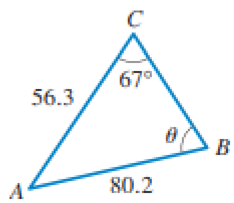
2.



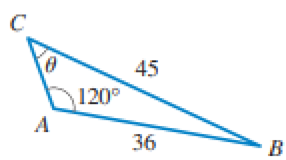
3.



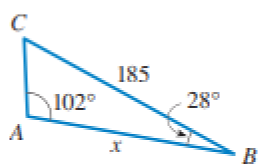
4.



5.



6.



LEY DE LOS COSENOS

La ley de los senos no se puede usar de manera directa para resolver triángulos si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados (éstos son los casos 3 y 4 de la sección anterior). En estos dos casos, se aplica la **ley de los cosenos.**

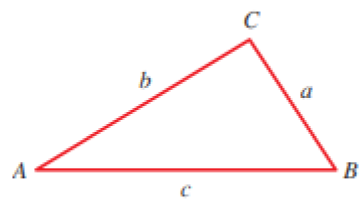


Figura 1

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC (véase la figura 1), se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

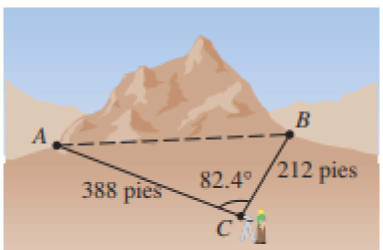


Figura 3

Ejemplo 1 Longitud de un túnel

Se construirá un túnel por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura 3. Use los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

Solución Para aproximar la longitud c del túnel, se usa la ley de los cosenos:

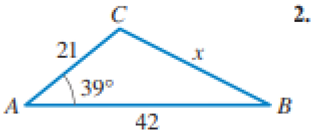
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Ley de los cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4° && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use una calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Saque la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Así, el túnel medirá alrededor de 417 pies de largo. ■

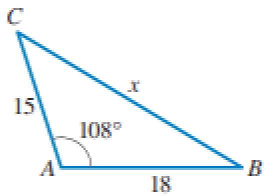
TALLER N°10

1–8 ■ Use la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ.

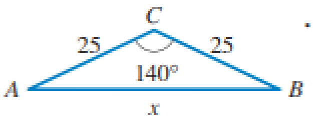
1.

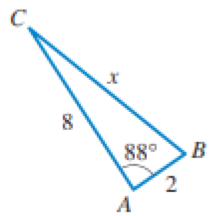


2.

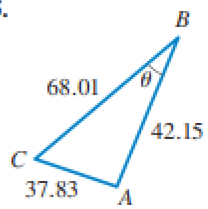


3.

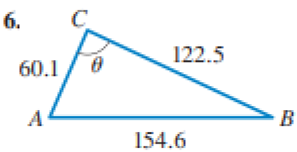




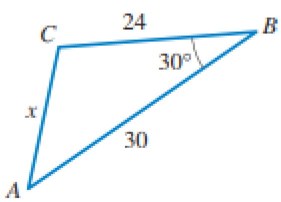
5.



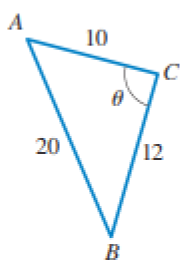
6.



7.



8.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned}
\cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\
&= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \sec t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

TALLER N°11

1–10 ■ Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y después simplifique.

1. $\cos t \tan t$
2. $\cos t \csc t$
3. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta$
4. $\tan\theta \csc\theta$
5. $\tan^2 x - \sec^2 x$
6. $\dfrac{\sec x}{\csc x}$
7. $\operatorname{sen} u + \cot u \cos u$
8. $\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta)$
9. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
10. $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta - \operatorname{sen}\theta}$

11–24 ■ Simplifique la expresión trigonométrica.

11. $\dfrac{\operatorname{sen} x \sec x}{\tan x}$
12. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$
13. $\dfrac{1+\cos y}{1+\sec y}$
14. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$
15. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$
16. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$
17. $\dfrac{1+\csc x}{\cos x + \cot x}$
18. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$
19. $\dfrac{1+\operatorname{sen} u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1+\operatorname{sen} u}$
20. $\tan x \cos x \csc x$
21. $\dfrac{2+\tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$
22. $\dfrac{1+\cot A}{\csc A}$
23. $\tan\theta + \cos(-\theta) + \tan(-\theta)$
24. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

37. $(1-\cos\beta)(1+\cos\beta) = \dfrac{1}{\csc^2\beta}$
38. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} = 1$
39. $\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$
40. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^4 = (1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)^2$
41. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \operatorname{sen}^2 t$
42. $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = (\sec x - \tan x)^2$
43. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$
44. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$
45. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\operatorname{sen} x$
46. $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$
47. $(1-\cos^2 x)(1+\cot^2 x) = 1$
48. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
49. $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
50. $(\tan y + \cot y)\operatorname{sen} y \cos y = 1$
51. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$
52. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
53. $\tan^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta$
54. $\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$

25–88 ■ Verifique la identidad.

25. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta} = \cos\theta$

26. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \operatorname{sen} x$

27. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$

28. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$

29. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$

30. $\dfrac{\cos v}{\sec v \operatorname{sen} v} = \csc v - \operatorname{sen} v$

31. $\operatorname{sen} B + \cos B \cot B = \csc B$

32. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

33. $\cot(-\alpha)\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) = -\csc\alpha$

34. $\csc x\,[\csc x + \operatorname{sen}(-x)] = \cot^2 x$

35. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

36. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x\cos x$

55. $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}$

56 $\dfrac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$

57. $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t\cos t} = 2 + \sec t\csc t$

58. $\sec t\csc t\,(\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$

59. $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$

60. $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$

61. $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x\,(\sec x + \tan x)$

62. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

La primera ecuación es una *identidad*, es decir, es cierta para todo valor de la variable x. Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x. Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea cierta. Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado del signo igual. Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Solución Empezamos por aislar $\operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen} x - 1 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ 2\operatorname{sen} x &= 1 && \text{Suma de 1} \\ \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} && \text{División entre 2} \end{aligned}$$

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 1 se ilustra una representación gráfica de las soluciones.

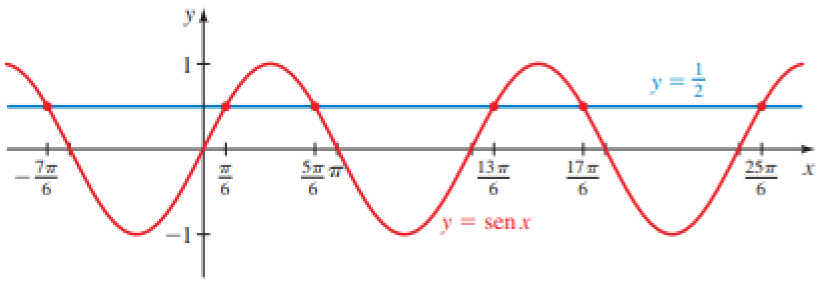


Figura 1

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Solución Empezamos por aislar a $\tan x$.

$$\tan^2 x - 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$\tan^2 x = 3 \qquad \text{Suma de 3}$$
$$\tan x = \pm\sqrt{3} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otras soluciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

TALLER N°12

1–40 ■ Calcule todas las soluciones de las ecuaciones.

1. $\cos x + 1 = 0$
2. $\operatorname{sen} x + 1 = 0$
3. $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$
4. $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$
5. $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$
6. $\cot x + 1 = 0$
7. $4 \cos^2 x - 1 = 0$
8. $2 \cos^2 x - 1 = 0$
9. $\sec^2 x - 2 = 0$
10. $\csc^2 x - 4 = 0$
11. $3 \csc^2 x - 4 = 0$
12. $1 - \tan^2 x = 0$
13. $\cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$
14. $\sec x\,(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$
15. $(\tan x + \sqrt{3})(\cos x + 2) = 0$
16. $(2 \cos x + \sqrt{3})(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$
17. $\cos x \operatorname{sen} x - 2 \cos x = 0$
18. $\tan x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$
19. $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$
20. $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

21. $\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen } x + 3$

22. $3 \tan^3 x = \tan x$

23. $\text{sen}^2 x = 4 - 2 \cos^2 x$

24. $2 \cos^2 x + \text{sen } x = 1$

25. $2 \text{ sen } 3x + 1 = 0$

26. $2 \cos 2x + 1 = 0$

27. $\sec 4x - 2 = 0$

28. $\sqrt{3} \tan 3x + 1 = 0$

29. $\sqrt{3} \text{ sen } 2x = \cos 2x$

30. $\cos 3x = \text{sen } 3x$

31. $\cos \frac{x}{2} - 1 = 0$

32. $2 \text{ sen } \frac{x}{3} + \sqrt{3} = 0$

33. $\tan \frac{x}{4} + \sqrt{3} = 0$

34. $\sec \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}$

35. $\tan^5 x - 9 \tan x = 0$

36. $3 \tan^3 x - 3 \tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

37. $4 \text{ sen } x \cos x + 2 \text{ sen } x - 2 \cos x - 1 = 0$

38. $\text{sen } 2x = 2 \tan 2x$

39. $\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x = 0$

40. $\sec x - \tan x = \cos x$

Para una mejor comprensión de la ley del coseno, observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=10&t=0s

Ejemplo 1:

https://www.youtube.com/watch?v=x4sCCs5q8aA&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=11&t=0s

Ejemplo 2:

https://www.youtube.com/watch?v=cCeJffSwHvc

Para una mejor comprensión de la ley del seno, observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-

Ejemplo 1:

https://www.youtube.com/watch?v=nCK3jKq_Iyk&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=2

Ejemplo 2:

https://www.youtube.com/watch?v=5l-

¿CÓMO SABER CUÁNDO SE USA LA LEY DEL SENO O DEL COSENO?

Observa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=uEGkKnn2jCI

Libro "Los Caminos del saber" Matemáticas 10°. Santillana, que se encuentra en el siguiente link

file:///C:/Users/pc/Desktop/los-caminos-del-saber-matematicas-10.pdf

El siguiente punto lo encontrarás en el link https://es.calameo.com/read/00331129919fbd6a078c5

Recursos didácticos: ¿Qué usar?

1. **Videos.**

https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1
https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-
https://www.youtube.com/watch?v=nCK3jKq_Iyk&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=2
https://www.youtube.com/watch?v=5l-elvt30D0&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=3
https://www.youtube.com/watch?v=blOkYHt7fJE&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=4
https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=10&t=0s
https://www.youtube.com/watch?v=x4sCCs5q8aA&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=11&t=0s
https://www.youtube.com/watch?v=cCeJffSwHvc
https://www.youtube.com/watch?v=uEGkKnn2jCI

2. **Libros digitales:**

file:///C:/Users/pc/Desktop/los-caminos-del-saber-matematicas-10.pdf

3. **Guías digitales**

https://es.calameo.com/read/00331129919fbd6a078c5

TEMPORALIZACIÓN:

1º semana:

- ✓ Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

2º semana:

- ✓ Razones trigonométricas de ángulos notables.

3º semana:

- ✓ Resolución de triángulos rectángulos.

4º semana:

- ✓ Ángulos de elevación y ángulo de depresión.

5º semana:

- ✓ Aplicaciones a triángulos rectángulos.

6º semana:

- ✓ Ley del seno y del coseno.
- ✓ Actividades.

7º semana:

- ✓ Graficas trigonométricas.

8º semana:

- ✓ Ecuaciones trigonométricas.

9º semana:

- ✓ identidades trigonométricas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

- ✓ Usar las razones trigonométricas y sus transformaciones en la resolución de triángulos rectángulos y problemas geométricos diversos.
- ✓ Resolver problemas de la vida cotidiana mediante el uso de los teoremas del seno y del coseno.
- ✓ Obtener todas las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera relacionándolo con otro ángulo del primer cuadrante.
- ✓ Graficar las funciones trigonométricas.
- ✓ Resolver las identidades y ecuaciones trigonométricas.
- ✓ Mostrar compromiso y dedicación con la asignatura.