GUÍA DIDÁCTICA MATEMÁTICAS – GRADO NOVENO

PERIODO DOS

Objetivo general: ✓ Comprender los números reales como un conjunto que engloba a otros sistemas numéricos identificando de acuerdo con sus características. ✓ Identificar las características de la Función Lineal. ✓ Determinar la ecuación de una función lineal a partir de sus elementos. ✓ Modelar como una función lineal situaciones de la vida real que permitan su uso con el fin de realizar estimaciones. ✓ Modelar problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales 2x2. ✓ Hallar medidas de tendencia centran y de dispersión. ✓ Realizar gráficas estadísticas.
Objetivos Específicos: Identificar un sistema de ecuaciones lineales. Representar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales. Resolver un sistema de ecuaciones lineales, por varios métodos. Aplicar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en la solución de problemas
Temas: **Números reales: Operaciones, propiedades.** **Función lineal, resolver ecuaciones lineales.** **Sistemas de ecuaciones de 2x2 y de 3x3.** **Modelar problemas mediante sistemas de ecuaciones 2-2 y 3-3** **Medidas de posición no central** **Diagramas de caja y bigote**

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS.

- Los saberes previos será la base de los conceptos para ser abordados y complementar lo que ya saben.
- Videos de apoyo para ser vistos previos y después de las clases.
- Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes, con el fin de que resulten motivadoras.
- Hacer uso de las TICS para retroalimentar, los conceptos de la unidad didáctica.
- Apoyo contante de los textos. Vamos a aprender matemática grado 9. Dispuestos en el aula para ser usados en clase.

FUNCIONES LINEAL Y AFÍN. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

¿Qué tipo de función es $f(x) = -2x + 3$? Escribe dos puntos que pertenezcan a ella.

Solución, recuerda, elegir dos valores para x, puede ser

X	-3	0
F(x)	9	3

Es una línea afín.

Pendiente de una recta

En general, en una relación funcional $y = f(x)$, la razón de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x se calcula mediante la expresión:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

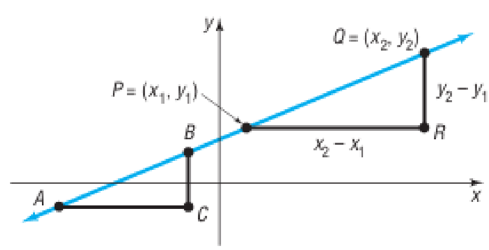
(x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos pares de valores de la función.

Dos comentarios acerca del cálculo de la pendiente de una recta no vertical pueden ser útiles.

1. Cualesquiera dos puntos distintos en una recta se utilizan para calcular la pendiente de la recta. (Vea la justificación en la figura 34.)

Figura 34
Los triángulos ABC y PQR son similares (ángulos iguales). Entonces, las razones de lados correspondientes son proporcionales, así

$$\text{Pendiente usando } P \text{ y } Q = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \text{Pendiente usando } A \text{ y } B$$

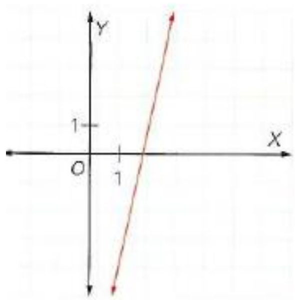


2. La pendiente de una recta se calcula de $P = (x_1, y_1)$ a $Q = (x_2, y_2)$ o de Q a P porque

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

En una función lineal $y = mx$ o en una función afín $y = mx + b$, la **constante de proporcionalidad** m corresponde a la **pendiente** de la recta mediante la cual se representa la función.

De acuerdo con lo anterior, tanto las funciones lineales como las funciones afines son **crecientes** en su dominio si su pendiente es positiva y son **decrecientes** en su dominio si su pendiente es negativa. Además, una función afín es **constante** si su pendiente es cero y corresponde a una recta paralela al eje X.



Ejemplo 1

Para hallar la pendiente de la recta de la Figura 5.17, se consideran dos puntos que pertenezcan a ella; por ejemplo, $(x_1, y_1) = (1, -4)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$. Luego, se reemplazan los valores correspondientes en la expresión general de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-4)}{2-1} = 5$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta dada es 5.

EJEMPLO 1 Encontrar e interpretar la pendiente de una recta que contiene dos puntos

La pendiente m de la recta que contiene los puntos $(1, 2)$ y $(5, -3)$ se calcula como

$$m = \frac{-3 - 2}{5 - 1} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4} \quad \text{o como} \quad m = \frac{2 - (-3)}{1 - 5} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Para cada cambio de 4 unidades en x, y cambiará -5 unidades; es decir, si x aumenta 4 unidades, entonces y disminuye 5 unidades. La razón de cambio promedio de y respecto a x es $-\frac{5}{4}$. ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 7 Y 13.

Para obtener una mejor idea del significado de la pendiente m de una recta L, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Pendientes de varias rectas que contienen el mismo punto (2, 3)

Calcule las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que contienen los siguientes pares de puntos. Grafique las cuatro líneas en el mismo conjunto de ejes coordenados.

$$\begin{aligned}
L_1&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_1 = (-1, -2)\\
L_2&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_2 = (3, -1)\\
L_3&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_3 = (5, 3)\\
L_4&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_4 = (2, 5)
\end{aligned}$$

www.elsolucionario.net

Solución Sean m_1, m_2, m_3 y m_4 las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente. Entonces

$$m_1 = \frac{-2 - 3}{-1 - 2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

Elevación de 5 dividida entre recorrido de 3.

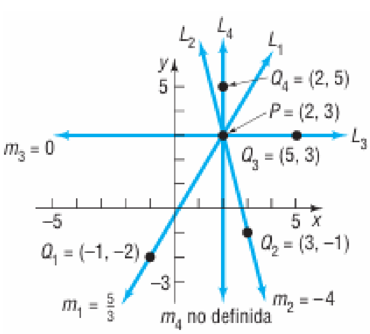
$$m_2 = \frac{-1 - 3}{3 - 2} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$m_3 = \frac{3 - 3}{5 - 2} = \frac{0}{3} = 0$$

m_4 no está definida

Las gráficas de estas rectas están dadas en la figura 35. ◀

Figura 35

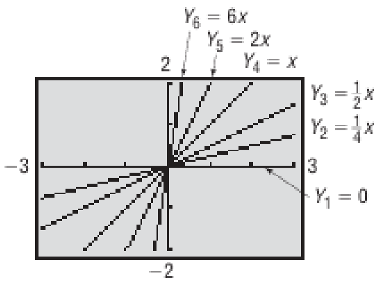


La figura 35 ilustra los siguientes hechos:

1. Cuando la pendiente de una recta es positiva, la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (L_1).
2. Cuando la pendiente de una recta es negativa, la recta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha (L_2).
3. Cuando la pendiente es 0, la recta es horizontal (L_3).
4. Cuando la pendiente no está definida, la recta es la línea vertical (L_4).

Para ver el concepto

Figura 36



En la misma pantalla cuadrada, grafique las siguientes ecuaciones:

$Y_1 = 0$ La pendiente de la recta es 0.

$Y_2 = \frac{1}{4}x$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{4}$.

$Y_3 = \frac{1}{2}x$ La pendiente de la recta es $\frac{1}{2}$.

$Y_4 = x$ La pendiente de la recta es 1.

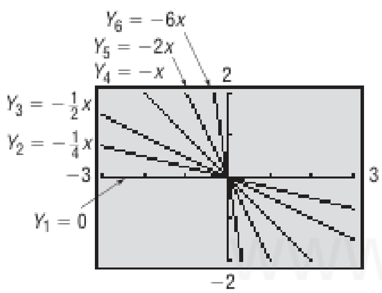
$Y_5 = 2x$ La pendiente de la recta es 2.

$Y_6 = 6x$ La pendiente de la recta es 6.

Vea la figura 36.

Para ver el concepto

Figura 37



En la misma pantalla cuadrada, grafique las siguientes ecuaciones:

$Y_1 = 0$ La pendiente de la recta es 0.

$Y_2 = -\frac{1}{4}x$ La pendiente de la recta es $-\frac{1}{4}$.

$Y_3 = -\frac{1}{2}x$ La pendiente de la recta es $-\frac{1}{2}$.

$Y_4 = -x$ La pendiente de la recta es -1.

$Y_5 = -2x$ La pendiente de la recta es -2.

$Y_6 = -6x$ La pendiente de la recta es -6.

Vea la figura 37.

Las figuras 36 y 37 ilustran que cuanto más cerca esté la recta de la posición vertical, mayor es la magnitud de la pendiente.

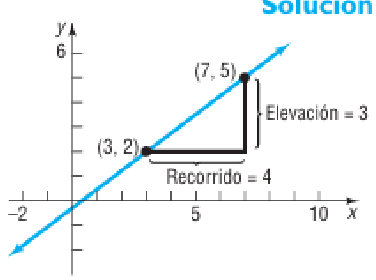
2 El siguiente ejemplo ilustra cómo se utiliza la pendiente para graficar la recta.

EJEMPLO 3 Gráfica de una recta dados un punto y la pendiente

Grafique la recta que contiene el punto (3, 2) y cuya pendiente es

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{5}$

Figura 38



Solución

a) Pendiente $= \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$. El hecho de que la pendiente sea $\frac{3}{4}$ significa que por cada movimiento horizontal de 4 unidades a la derecha, habrá un movimiento vertical (elevación) de 3 unidades. Si comenzamos en el punto dado (3, 2) y nos movemos 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba, llegamos al punto (7, 5). Al dibujar la recta que pasa por este punto y el punto (3, 2), se obtiene la gráfica. Vea la figura 38.

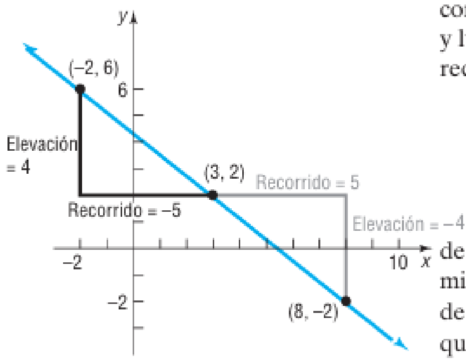
b) El hecho de que la pendiente sea

$$-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

significa que por cada movimiento horizontal de 5 unidades (recorrido = 5) a la derecha, habrá un movimiento vertical correspondiente de -4

www.elsolucionario.net

Figura 39



unidades (elevación $= -4$, movimiento hacia abajo de 4 unidades). Si comenzamos en el punto $(3, 2)$ y nos movemos 5 unidades a la derecha y luego 4 unidades hacia abajo, llegamos al punto $(8, -2)$. Al dibujar la recta que pasa por estos puntos, se obtiene la gráfica. Vea la figura 39.

De forma alternativa, se establece

$$-\frac{4}{5} = \frac{4}{-5} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

de manera que por cada movimiento horizontal de -5 unidades (movimiento a la izquierda) habrá un movimiento vertical correspondiente de 4 unidades (hacia arriba). Este enfoque nos lleva al punto en $(-2, 6)$, que también está en la gráfica mostrada en la figura 39. ◀

VIDEO: [profe alex pendiente de una recta - YouTube](www.youtube.com/watch?v=ULxjPNTiAZ8)
www.youtube.com/watch?v=ULxjPNTiAZ8

www.youtube.com/watch?v=pmW_RHPRRUY

Taller

1. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.
   a. $(-1, 4)\ y\ (2, 4)$
   b. $(-6, 4)\ y\ (5, -2)$

2. **Lee y resuelve**

Cuando la pendiente de una recta es indeterminada, dicha recta es vertical (paralela al eje Y). Por ejemplo, $x = 3$ es la ecuación de una recta cuya pendiente no puede determinarse. Su gráfica se muestra en la Figura 5.18.

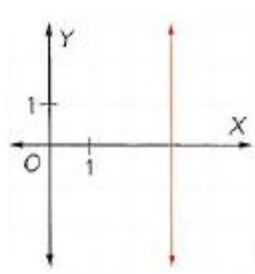


Figura 5.18

Traza la gráfica de las siguientes rectas.

a. $x = -3$ b. $x = 4$

3 Calcula la pendiente de las rectas que se muestran en las figuras 5.19 a 5.22.

a.

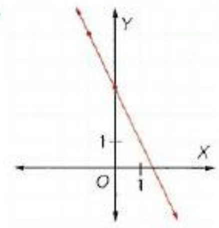


Figura 5.19

b.

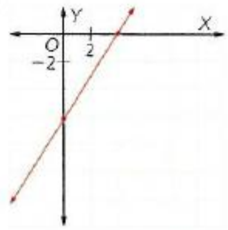


Figura 5.20

c.

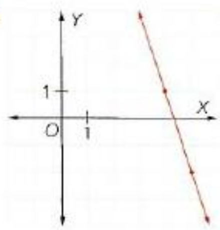


Figura 5.21

d.

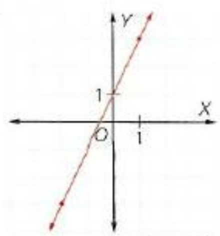


Figura 5.22

Resolución de problemas

4 El encargado de pruebas de velocidad de una empresa aeronáutica desea conocer la velocidad de un avión en cierto lapso de tiempo. Para ello, midió el tiempo en minutos junto con la distancia recorrida en kilómetros (Tabla 5.13).

Tiempo (m) x	**Distancia recorrida (km)** y
20	100
30	125
40	150

Tabla 5.13

a. Analiza los datos y decide si el avión tiene una tasa de variación de cambio constante o no, a partir de la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida.

b. Halla una función lineal que modele la situación.

Evaluación del aprendizaje

Estudia las tablas de valores. Luego, clasifícalas, según corresponda, en funciones crecientes, decrecientes o constantes.

a.

x	$y = f(x)$
−2	7
−1	7
0	7
1	7
2	7

Tabla 5.14

b.

x	$y = f(x)$
−2	5,5
−1	5,25
0	5
1	4,75
2	4,5

Tabla 5.15

c.

x	$y = f(x)$
−2	9
−1	11
0	13
1	15
2	17

Tabla 5.16

d.

x	$y = f(x)$
−2	−12
−1	−10
0	−8
1	−6
2	−4

Tabla 5.17

Actividad

Video, **Las matemáticas son para siempre**

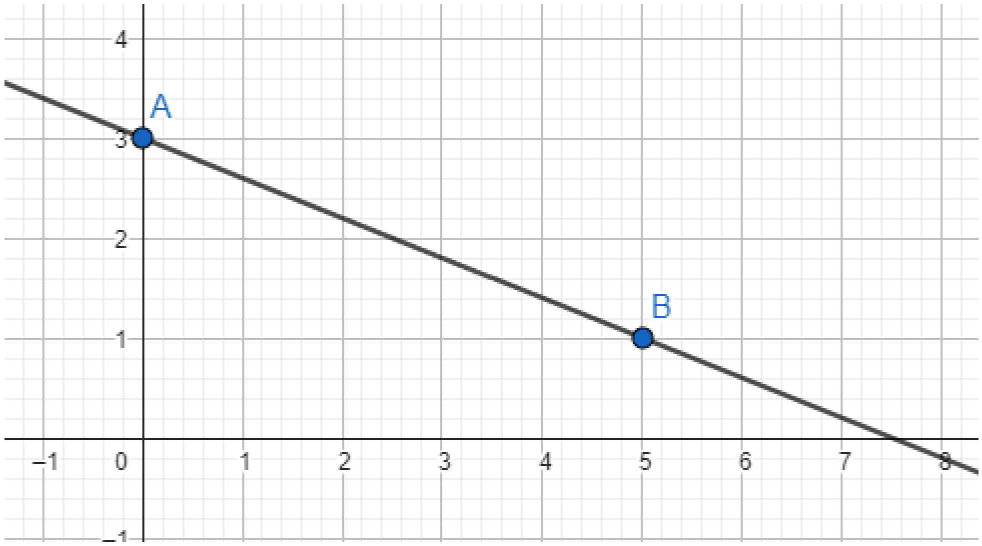
Eduardo Sáenz de Cabezón /www.youtube.com/watch?v=jej8qlzlAGw

Informe del video.

ECUACIÓN DE LA RECTA

Representa gráficamente la recta que tiene pendiente $m = -\frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(0,3)$

Solución.



Se encuentra el punto de intersección (0,3) y la pendiente es desde ese punto 5 a la derecha y baja 2 unidades.

Ecuación da la recta conociendo la pendiente y un punto

A la expresión $(y - y_1) = m(x - x_1)$ se le conoce como **ecuación punto-pendiente.**

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \longleftarrow \text{Ecuación de la recta}$$

La ecuación de una recta dados la pendiente m y un punto (x_1, y_1) es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente.**

Ejemplo 1

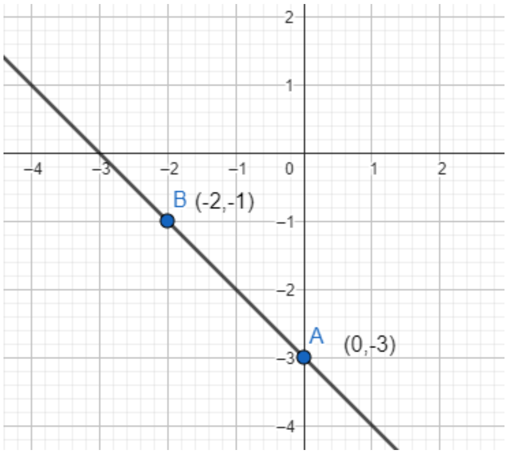
La ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, -1) y cuya pendiente es -1 es:

$$y - (-1) = -[x - (-2)]$$

$$y + 1 = -x - 2$$

$$y = -x - 2 - 1$$

$$y = -x - 3$$



ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCINEDO DOS PUNTOS

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Usar la pendiente m calculada y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2) para reemplazar en la ecuación punto-pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Ejemplo 2

Observa cómo se halla la ecuación de la recta correspondiente a los valores que se registran en la Tabla 5.18.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−14	−11	−8	−5	−2	1

Tabla 5.18

Sean $(x_1, y_1) = (-1, -8)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$, primero se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-8)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Se reemplaza en la **ecuación punto-pendiente** y se obtiene, luego de simplificar: $y = 3x - 5$.

Video: ecuación de la recta

www.youtube.com/watch?v=GBSmycLgTeU&list=PLeySRPnY35dE1JAjLtnjoDTA5-oWq6m2w

TALLER

1. Encuentra, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.
   a. P (-7, 4) y m = 5 b. P (-1, 7) y m = - 2

2. Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos
a. (2, 14) y (-1, -7) b. (-3, 5) y (-4, -1)

3. Indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\boldsymbol{y = 7x - 33}$ **y cuales no. Justifica en cada caso tu respuesta.**

a. $(5, -2)$ b. $(5, 2)$ c. $(2, 5)$ d. $(2, -5)$

4. Determina el valor de verdad de cada afirmación.

a. La recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(4, 0)$ tiene por ecuación $y = -2x + 8$.

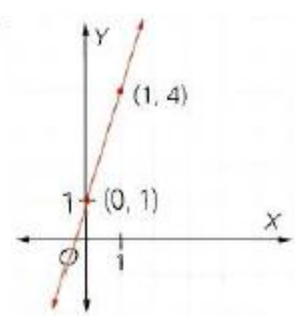
b. La ecuación de la recta que pasa por $(-5, 1)$ y $(-6, 3)$ es $y = 2x + 9$.

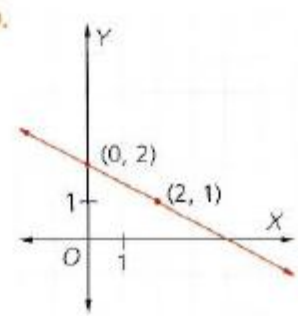
c. La recta cuya ecuación es $y = -6$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $(-2, 6)$.

d. La ecuación de la recta que pasa por $(-7, 8)$ y por $(-6, 11)$ es $y = 3x + 29$.

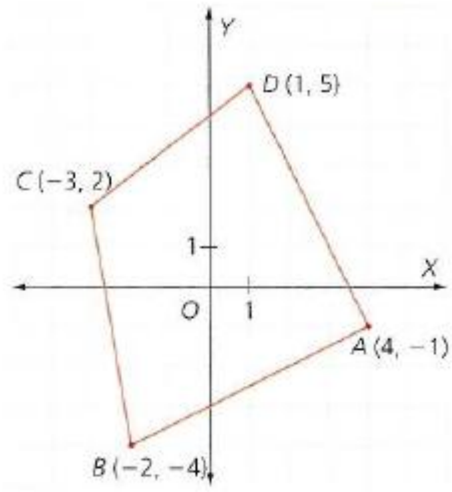
e. La ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y $(4, -1)$ es $y = \frac{1}{2}x - 3$.

5. Calcula la pendiente de cada recta. Y luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella.

a.


b.


6. Analiza la información de la figura. Luego, responde la pregunta. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del cuadrilátero ABCD?



7.

Una empresa de turismo ha observado que cuando el precio de un viaje es de $ 15 000 se venden 40 asientos, pero si el precio sube a $ 18 000 las ventas bajan a 30 asientos.

a. Encuentra la ecuación de la recta que representa la situación y dibuja su gráfica.

b. Realiza la gráfica de la función.

c. Determina el precio del pasaje si la venta sube a 56 asientos.

Educación ambiental

Un estudio revela que una parte de determinado páramo produjo en el primer año de observación 60 000 L de agua y a los cinco años la producción de agua se redujo a 15 000 L.

- Halla la ecuación de la recta que modela esta situación y grafícala. ¿Qué crees que ha pasado con el páramo?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Plantear y resolver un **sistema de ecuaciones** permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo { y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación.

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases}$$

Pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:
  Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.
  Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.
- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

Resolución de un sistema de ecuaciones

Es importante después de tener la solución del sistema verificar si es correcta o no dicha solución.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones 2×2.

Tablas de valores

Gráficas de las ecuaciones lineales

Sustitución

Reducción

Igualación

Regla de Cramer

A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Tablas de valores y gráficas:** en estos métodos tiene gran relevancia el análisis de cada una de las ecuaciones, razón por la cual es importante aplicar los conceptos y procedimientos presentados en temas anteriores.
- **Sustitución, reducción e igualación:** estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, razón por la que se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.
- **Regla de Cramer:** on este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.

VIDEO: SISTEMAS DE ECUACIONES

www.youtube.com/watch?v=oQQfG1zIPMc&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ

Resolución de sistemas de ecuaciones por tablas

A continuación se detallan algunos pasos útiles para resolver un sistema de ecuaciones con este método:

1.° Se elige una de las ecuaciones del sistema.

2.° Se despeja una de las incógnitas de la ecuación elegida. En este caso es aconsejable despejar la que resulte más sencilla.

3.° Se asigna un valor a la incógnita independiente. Es importante anotar que aunque este valor es arbitrario, deben tenerse en cuenta las condiciones del sistema y estimar valores que, a criterio propio, podrían ser la solución.

4.° Se realizan las operaciones planteadas en la ecuación para determinar el valor de la incógnita dependiente.

5.° Se reemplaza, en la segunda ecuación, los valores hallados en los pasos anteriores.

6.° Se comprueba si dichos valores verifican la segunda ecuación.

El proceso termina cuando los valores dados para la primera ecuación verifican la segunda ecuación.

Los pasos anteriores se registran en una tabla en la que las dos primeras filas son las incógnitas y la tercera fila es la segunda ecuación.

Ejemplo 1.

Para solucionar el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$, pueden seguirse estos pasos:

1.° La ecuación elegida es $x + y = 3$.

2.° $y = 3 - x$

3.° $x = 3$

4.° Si $x = 3$, entonces $y = 0$

5.° En $-x + y = -1$ se tiene que: $-3 + 0 = -3$

6.° Los valores no verifican la ecuación $-x + y = -1$.

Ahora se repiten estos pasos y se completa una tabla hasta encontrar la solución del sistema. Los valores encontrados se muestran en la Tabla 5.19.

x	3	1	2
y	0	2	1
$-x + y$	−3	1	−1

Tabla 5.19

Los valores $x = 2$ y $y = 1$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema.

Para algunos sistemas la solución no se encuentra de forma tan sencilla como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.

Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 30 \end{cases}$.

x	−1	0	2	5	7	11
y	−4	−3	−1	2	4	8
$2x + y$	−6	−3	3	12	18	30

Tabla 5.20

En la Tabla 5.20 se encuentra que los valores $x = 11$ y $y = 8$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema de ecuaciones dado.

Taller

Razonamiento

1 Relaciona cada sistema de ecuaciones lineales con su respectiva solución.

Sistemas	Soluciones
a. $\begin{cases} 7m + 9n = 42 \\ 12m + 10n = -4 \end{cases}$	$m = 3; n = 4$
b. $\begin{cases} m + 6n = 27 \\ 7m - 3n = 9 \end{cases}$	$m = -4; n = -5$
c. $\begin{cases} 3m + 5n = 7 \\ 2m - n = -4 \end{cases}$	$m = -1; n = 2$
d. $\begin{cases} 3m - 2n = -2 \\ 5m + 8n = -60 \end{cases}$	$m = -12; n = 14$

2 Explica por qué los valores dados no son una solución del sistema de ecuaciones lineales. Luego, escribe un párrafo en el que justifiques tu modelo de solución.

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

$x = 3; y = 7$

b. $\begin{cases} 7a + 4b = 13 \\ 5a - 2b = 19 \end{cases}$

$a = 0; b = \dfrac{13}{4}$

c. $\begin{cases} 5t + 6s = 20 \\ 4t - 3s = -23 \end{cases}$

$t = -1; s = 3$

d. $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

$w = 1; z = -\dfrac{2}{3}$

3 La diferencia entre dos números es 5, y si se suman, el total es 29. Encuentra los dos números.

Evaluación del aprendizaje

i Soluciona los siguientes sistemas con tablas a partir de los valores propuestos.

a. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 4y = -26 \end{cases}$

x	0	8	1	4	3
y					
2x − 4y					

Tabla 5.21

b. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

x	21	0	3	7	6
y					
x − y					

Tabla 5.22

ii Soluciona los sistemas de ecuaciones con tablas.

a. $\begin{cases} a - 5b = 8 \\ -7a + 8b = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4m - 5n = 8 \\ 8m - 9n = -77 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4z + 5w = 5 \\ -10w - 4z = -7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 5y = -24 \\ 8x - 3y = 19 \end{cases}$

Resolución por el método gráfico.

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Para llenar un tanque de 31 m^3 se abren dos llaves simultáneamente. Una de ellas se cierra siete horas después de abrirla y la otra, dos horas después. Luego, intenta llenarse un tanque de 27 m^3 con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a las cuatro horas de abrirla y la segunda, a las tres horas.

- ¿Cuántos litros salen de cada llave en una hora?

En la situación presentada puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo, x y y.

Según las condiciones del problema, la relación entre x y y puede expresarse así:

Para el tanque de 31 m^3: $7x + 2y = 31$

Para el tanque de 27 m^3: $4x + 3y = 27$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

- **Ejemplo 1**

Para solucionar el sistema de ecuaciones asociado a la situación inicial, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

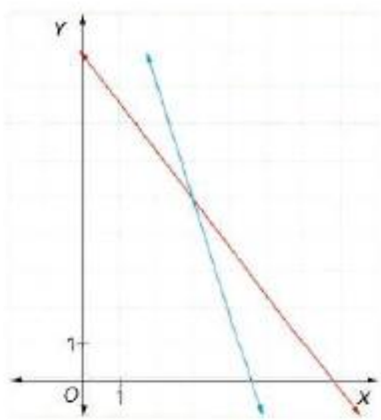


Figura 5.28

En la Figura 5.28 se observa que el punto en el cual se intersecan las dos rectas es (3, 5); es decir, la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$.

Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones

Gráficamente es posible identificar sistemas de ecuaciones compatibles determinados (las rectas se intersecan en un solo punto), compatibles indeterminados (las rectas coinciden) e incompatibles (las rectas no se intersecan).

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

Compatible determinado

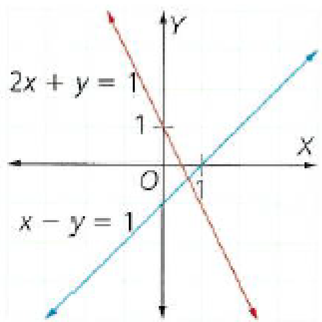


Figura 5.29

Compatible indeterminado

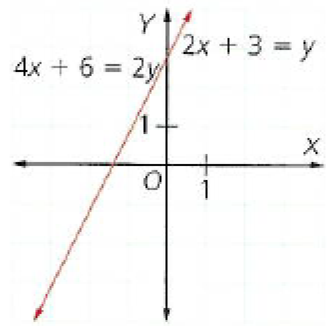
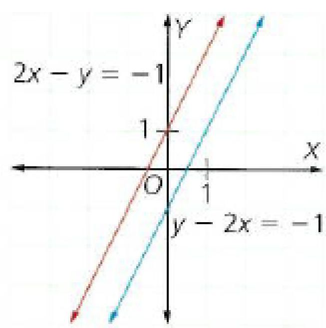


Figura 5.30

Incompatible



VIDEO: METODO GRÁFICO

www.youtube.com/watch?v=lJ2yfxzmAkc&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=2

www.youtube.com/watch?v=dJ18ERwjNb4&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=3

TALLER

1 Grafica y soluciona cada sistema.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

2 Determina la solución de cada sistema de ecuaciones. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

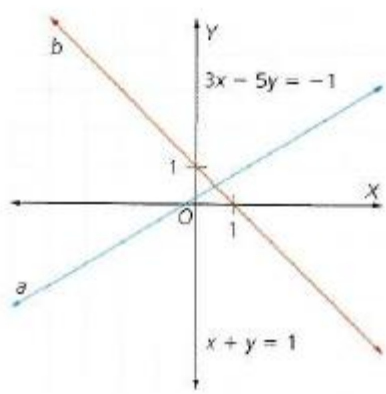


Figura 5.35

Figura 5.35

b.

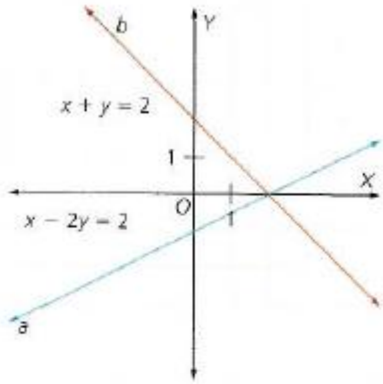
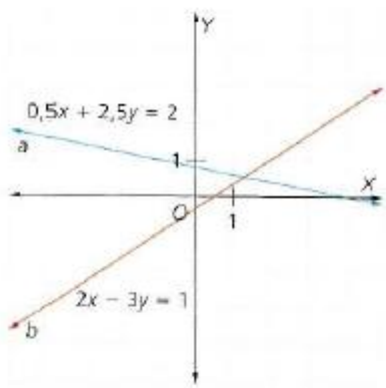


Figura 5.36

c.



3 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

a. $x = 2 \quad y = 21$ b. $(4{,}5,\ 2)$ c. $(-2,\ -0{,}5)$

Evaluación del aprendizaje

i Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones lineales con $6x - 2y = -3$, de tal forma que sea:

a. Determinado

b. Indeterminado

c. Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste. Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

ii Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.

a.

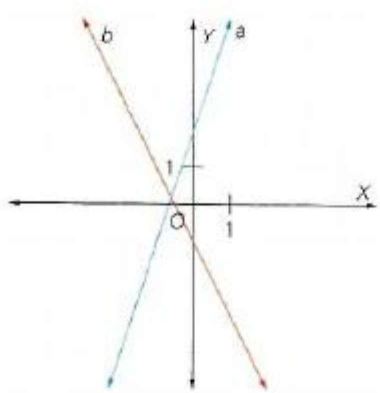
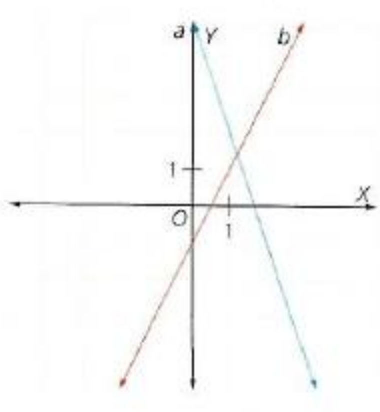


Figura 5.38

b.



RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.

- ¿Cuántos animales hay de cada especie?

El sistema de ecuaciones que representa la situación puede resolverse con el **método de sustitución**. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

m: cantidad de patos n: cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales: $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales: $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$ ← Se despeja m en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$ ← Se sustituye $m = 50 - n$ en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$ ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$ ← Se despeja n.

$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \frac{34}{2} \Rightarrow n = 17$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión $m = 50 - n$, así:

$$m = 50 - 17 = 33.$$

De esta manera, en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

Ejemplo 1

Para resolver el sistema de ecuaciones se realiza el procedimiento descrito.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

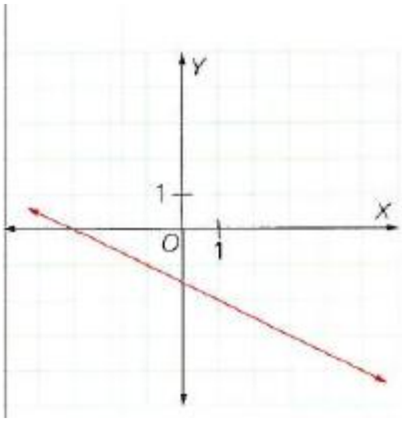
Se elige la primera ecuación y se despeja x.

$$x = -3 - 2y$$

Este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la



VIDEO: METODO DE SUSTITUCIÓN

www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=10

TALLER

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

2 Resuelve cada sistema de ecuaciones con el método de sustitución.

Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase. Para ello, utiliza solo el valor de la solución en la incógnita y.

a. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \dfrac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$ Letra N

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} - \dfrac{3y}{4} = 7 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{8} = 0 \end{cases}$ Letra I

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ Letra L

d. $\begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{5x}{6} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{4} = 1 \end{cases}$ Letra A

e. $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{7y}{6} = -12 \end{cases}$ Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

___	___	___	___	___	___	___	___
-4	3	-4	12	-8	6	-8	6

3 Analiza el sistema y determina el valor que debe tomar a para que el sistema cumpla cada condición dada.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$ Compatible determinado

Incompatible

Evaluación del aprendizaje

Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.

a.

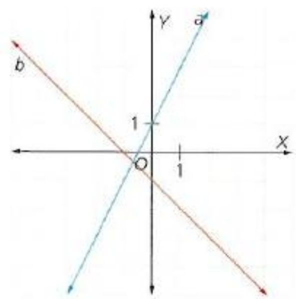


Figura 5.41

b.

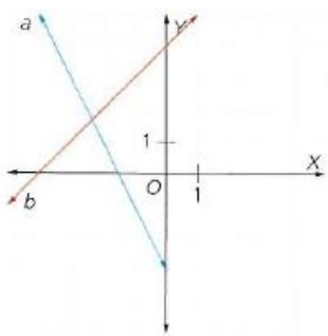


Figura 5.42

c.

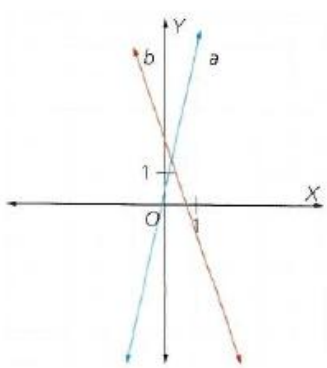


Figura 5.43

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Analiza

Un ama de casa va al supermercado y compra 6 kg de café y 3 kg de azúcar por $ 15 300. Días después nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 10 kg de azúcar por $ 8 250.

- ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Según los datos del problema, se tienen las ecuaciones: $6C + 3A = 15\,300$ y $C + 10A = 8\,250$. Así, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15300 \\ C + 10A = 8250 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción**, se elimina una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de la situación inicial por el método de reducción, pueden seguirse los pasos que se describen a continuación.

1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.

2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por -6, con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ -6C - 60A = -49\,500 \end{cases}$$

3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{rcr} 6C + 3A & = & 15\,300 \\ -6C - 60A & = & -49\,500 \\ \hline 0C - 57A & = & -34\,200 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita, que es A.

4.° Se soluciona la ecuación así: $-57A = -34\,200$, y se obtiene que $A = 600$.

5.° Se reemplaza el valor $A = 600$ en una de las ecuaciones:

$$C + 10A = 8\,250 \Rightarrow C = 8\,250 - 6\,000 \Rightarrow C = 2\,250.$$

Por lo tanto, un kilogramo de azúcar cuesta \$ 600 y un kilogramo de café cuesta \$ 2 250.

TALLER

Ejercitación

1 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

Resolución de problemas

3 Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde la pregunta.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a_2 y b_2 tiene el sistema infinitas soluciones?

SECRETARIA DE EDUCACION MUNICIPIO DE MEDELLIN

INSTITUCIÓN EDUCATIVA YERMO Y PARRES

Resolución 16322 del 27 de noviembre de 2002 **Nit 811018723-8**

Razonamiento

2 Resuelve cada sistema por reducción y busca su solución gráfica abajo (si no está entre las opciones, dibújala en tu cuaderno).

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

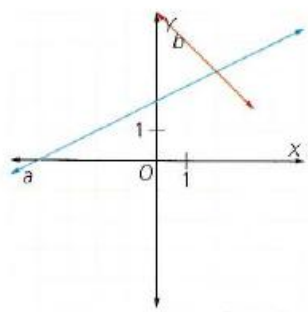


Figura 5.44

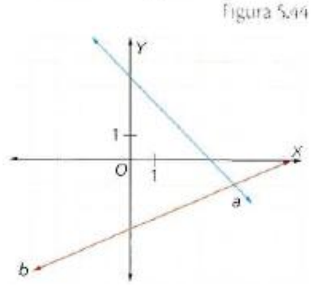


Figura 5.45

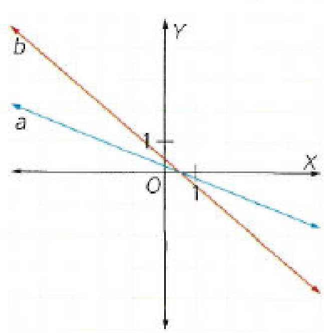


Figura 5.46

Evaluación del aprendizaje

Escribe la segunda ecuación en los literales a, b y c, y dibuja una recta en d. y e. de tal forma que cada sistema sea del tipo que se indica.

a. $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible determinado

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible indeterminado

c. $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ \end{cases}$ Incompatible

d.

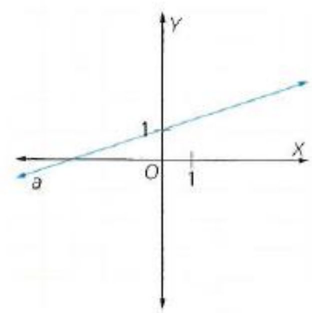


Figura 5.47

Incompatible

e.

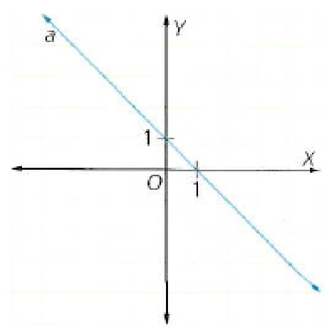


Figura 5.48

Compatible indeterminado

VIDEO:

www.youtube.com/watch?v=UMNcW4hjQK8&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=6

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Analiza

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 6, la diferencia de las fracciones obtenidas es 1.

- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta se consideran las siguientes incógnitas:

x: primer número y: segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que describe la situación

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicar la transitividad de las igualdades, con el fin de igualarlas y despejar la otra incógnita.

Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona como se muestra a continuación.

1.° Se despeja y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de y.

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja x.

$$-x - 2x = -6 - 51$$
$$-3x = -57$$
$$x = 19$$

4.° Se calcula el valor de y.

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

VIDEO:

www.youtube.com/watch?v=apPXOlZnRhg&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=8

TALLER

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

2 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución de cada sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$4n = 13 - 7m \qquad\qquad 5m - 2n = 19$

$n = \dfrac{13 - 7m}{4} \qquad\qquad n = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$\dfrac{13 - 7m}{4} = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$m = -\dfrac{50}{34} = -\dfrac{25}{17}$

Reemplazando para n, se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo, $m = -\dfrac{25}{17}$ y $n = \dfrac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$x = 10 - 2y \qquad\qquad x = \dfrac{5 - 4y}{2}$

$10 - 2y = \dfrac{5 - 4y}{2} \qquad 20 - 2y = 5 - 4y$

$-2y + 4y = 5 - 20 \qquad y = -\dfrac{15}{2}$

Remplazando para x, se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

3 Plantea dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados. Ten en cuenta las siguientes ecuaciones.

$2x - y = 1$ $\quad$ $x + y = 5$

$x - y = 12$ $\quad$ $x + y = 100$

$-2y + 5x = 10$ $\quad$ $2y - x = -3$

$2x - y = -3$ $\quad$ $2x + 10y = 40$

$3x - 30y = 15$ $\quad$ $3x + 3y = 15$

$-8y + 20x = 40$ $\quad$ $2y - x = 1$

4 Reúnete con cuatro compañeros y entre todos solucionen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos estudiados. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para resolver este sistema.

Resolución de problemas

5 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.

Evaluación del aprendizaje

i Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

ii Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el número obtenido es igual al dado más nueve unidades. Halla dicho número.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR LA REGLA DE CRAMER

Una **matriz** es la disposición de números que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

Es posible asignar a una matriz un número real llamado *determinante de la matriz*. Para un sistema de ecuaciones 2 · 2, en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación, y las constantes son c_1 y c_2 respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz	Matriz ampliada
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse en un sistema de ecuaciones, así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

VIDEO:

https://www.youtube.com/watch?v=apPXOlZnRhg&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=8

TALLER

1 Calcula los siguientes determinantes.

a. $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} c^2 & a \\ c^2 - a & a \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} x+2 & x+7 \\ x+7 & x+2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & m^2 \end{vmatrix}$

2 Determina el valor de la variable en cada caso.

a. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 15$

b. $\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = 100$

c. $\begin{vmatrix} x & -8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 16$

d. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 25$

3 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por el método de Cramer y explica la representación gráfica de cada solución.

a. $\begin{cases} 9x - y = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3y + 7x = -13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x + 3y = -26 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ 7x - 5y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 6x - 5y = -43 \\ x - 5y = -28 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2(x - y) = 5 \\ 4(1 - y) = 3x \end{cases}$

4 Intenta resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer y explica lo que ocurre.

a. $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 10x - 14y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 4x + 8y = 10 \end{cases}$

Escribe una conclusión acerca de lo que acabas de observar.

Resolución de problemas

5 Una evaluación consta de 16 preguntas. El maestro suma diez puntos por cada respuesta correcta y resta seis puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si Mario obtuvo 64 puntos en la evaluación, ¿cuántas preguntas contestó correctamente?

6 El administrador de una fábrica de computadores establece un plan de producción para dos modelos, *A* y *B*, y cuenta con dos divisiones.

Una división es el taller de máquinas donde se fabrican las partes del producto y la otra es la división de ensamble donde se unen las partes para obtener el producto final. El modelo *A* requiere cuatro horas para elaborar las piezas y cinco horas para ensamblarlas, y el modelo *B* requiere tres horas para elaborar las piezas y una para ensamblarlas.

Si la fábrica dispone de 95 horas mensuales para elaborar las piezas y 105 horas mensuales para ensamblarlas, ¿cuántos computadores tipo *A* y tipo *B* se pueden construir mensualmente en esta fábrica?

7 Dos jarras pequeñas y una jarra grande pueden contener ocho vasos de agua. Una jarra grande menos una jarra pequeña constituye dos vasos de agua. ¿Cuántos vasos de agua caben en cada jarra?

Evaluación del aprendizaje

i Una prueba tiene veinte preguntas por valor de 100 puntos. La prueba consiste en preguntas de verdadero y falso por valor de tres puntos cada una, y preguntas de selección múltiple por valor de once puntos cada una. ¿Cuántas preguntas de selección múltiple se encuentran en la prueba?

ii A lo largo del año 2015 se produjeron 11 600 accidentes de tráfico, de los cuales 5 600 se debieron a exceso de velocidad. Averigua el número de autos y de motos accidentados, si el 40% de los accidentes de autos y el 60% de los de motos se produjeron por no ir a la velocidad reglamentaria.

VIDEOS:

www.youtube.com/watch?v=XCFiQoDb65E&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=16

www.youtube.com/watch?v=9WgFUDaBxM8&list=PLeySRPnY35dErygDdRDp1912SPALoaBmZ&index=18

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Analiza

En la Tabla 4.10, se registró el número de llamadas diarias recibidas en cierta estación de bomberos durante la primera semana del año.

Día	Número de llamadas (x_i)
Lunes	12
Martes	16
Miércoles	31
Jueves	25
Viernes	34
Sábado	21
Domingo	19
	158

Tabla 4.10

- ¿Cuál fue el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana en la estación?

MEDIA ARITMÉTICA

Para calcular el promedio o la media aritmética, de las llamadas recibidas en la estación de bomberos durante esa semana, se suman los datos y el resultado se divide por la cantidad total de datos. Es decir:

$$\overline{x} = \frac{158}{7} = 22,6$$

Por lo tanto, el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana fue, aproximadamente, de 23 llamadas.

La **media aritmética** (denotada $\overline{x}$) de una variable, es el cociente entre la suma de todos los valores x_i de la misma y la cantidad total N de estos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

MEDIA ARITMÉTICA PARA DATOS AGRUPADOS

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en clases, se determina el cociente de la suma de los productos de cada marca de clase x_i y su correspondiente frecuencia f_i dividido entre el total de los datos, N.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

IV

Ejemplo 1

En un puesto de control de una autopista, se registraron las velocidades de algunos vehículos que transitaron durante cierto día de la semana. Observa la Tabla 4.11.

Velocidad (km/h)	Número de vehículos (f_i)
[100, 110)	15
[110, 120)	35
[120, 130)	25
[130, 140)	10

Tabla 4.11

Para determinar el promedio de las velocidades:

- Primero, se calculan las marcas de clase o los puntos medios de los intervalos de clase, es decir, x_i en la Tabla 4.12.
- Luego, se multiplican por su respectiva frecuencia y se divide la suma de estos resultados entre el total de los datos.

$$\overline{x} = \frac{105 \cdot 15 + 115 \cdot 35 + 125 \cdot 25 + 135 \cdot 10}{15 + 35 + 25 + 10} = \frac{10\,075}{85} = 118{,}5 \text{ km/h}$$

La velocidad promedio a la que transitaron ese día los 5 vehículos que se registraron fue de 118,5 km/h.

MODA Y CLASE MODAL

La **moda** (*Mo*) de una variable estadística es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Si los datos están agrupados en clases, se toma como valor aproximado de la moda, la **marca de la clase modal**.

Una distribución puede tener una moda (**unimodal**), dos modas (**bimodal**), tres modas (**trimodal**), etc. Si todos los valores se repiten el mismo número de veces, se considera que la distribución no tiene moda.

Ejemplo 2

Tomás encuestó a sus compañeros de clase para determinar el tiempo, en minutos, que dedican a estudiar en casa y registró los datos en la Tabla 4.13.

Se observa que la clase con mayor frecuencia es [35, 45). Esta se denomina **clase modal**, y significa que entre los compañeros de Tomás son más los que dedican entre 35 y 45 minutos a estudiar en casa.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
[15, 25)	3
[25, 35)	8
[35, 45)	10
[45, 55)	8
[55, 65)	8
[65, 75)	3

Tabla 4.13

MEDIANA Y CLASE MEDIANA

Tabla 4.13

La **mediana** (Me) de una variable estadística es el valor de la variable tal que el número de valores menores que él es igual al número de valores mayores que él.

La mediana depende del orden de los datos y no de su valor.

Ejemplo 3

Para calcular la mediana de la distribución de velocidades de la Tabla 4.14, se agrega una columna F_i con las frecuencias absolutas acumuladas (Tabla 4.15) y se calcula la mitad de los datos. Así: $\frac{101}{2} = 50{,}5$ vehículos.

Velocidad (km/h)	x_i	f_i	F_i
[90, 100)	95	16	16
[100, 110)	105	15	31
[110, 120)	115	35	66
[120, 130)	125	25	91
[130, 140)	135	10	101
		101	

Tabla 4.15

La clase mediana es [110, 120), porque allí $F_i > 50{,}5$. El valor aproximado de la mediana es la marca de clase del intervalo de la mediana. Es decir, $Me \approx \frac{110 + 120}{2}$. Por lo tanto, $Me \approx 115$ km/h.

Velocidades de los vehículos que transitan en una autopista		
Velocidad (km/h)	x_i	Número de vehículos f_i
[90, 100)	95	16
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10
		101

Tabla 4.14

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Relación entre media, mediana y moda en una distribución de frecuencias.

La **relación entre las medidas de tendencia central**, en una distribución de frecuencias, se puede observar trazando una curva suavizada. A esta relación se le denomina **sesgo**.

Dependiendo de los valores de la moda, la mediana y la media, se tienen las siguientes relaciones:

- Moda < Mediana < Media, es un **sesgo a derecha** y equivale a una **distribución positiva** (Figura 4.9).

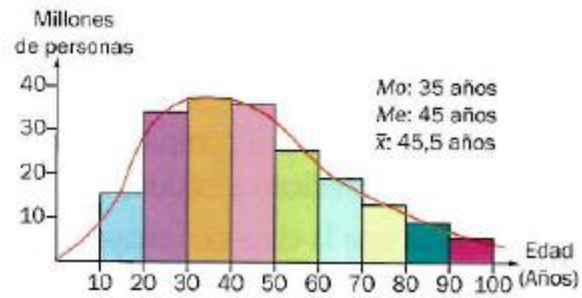


Figura 4.9

- Moda > Mediana > Media, es un **sesgo a izquierda** y corresponde a una **distribución negativa** (Figura 4.10).

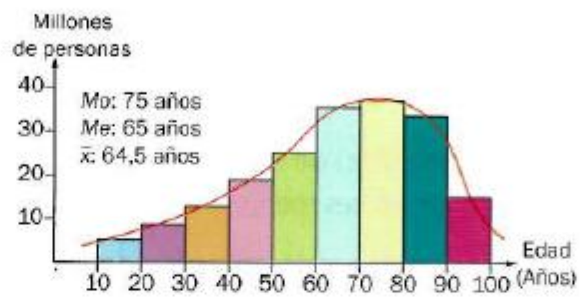


Figura 4.10

- Moda = Mediana = Media, es una **distribución normal**. La curva es simétrica (Figura 4.11).

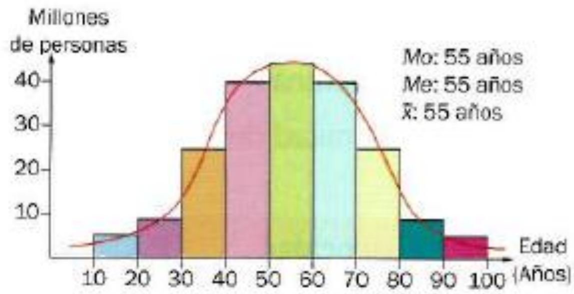


Figura 4.11

Ejemplo 4

La relación entre la moda, la media y la mediana de la distribución de la Figura 4.12 que determina la variación de la población de un virus, es un sesgo a derecha. Entonces, la distribución es positiva.

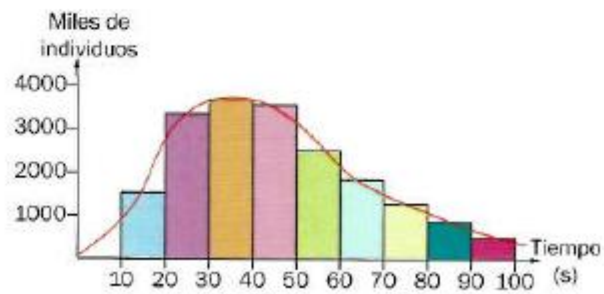


Figura 4.12

Taller

1 Halla la media aritmética de los resultados registrados en la Tabla 4.16 referentes a la longitud de salto de un grupo de atletas.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Número de atletas	6	12	15	4

Tabla 4.16

Razonamiento

2 Averigua el dato que falta en la siguiente distribución para que la media sea 18.

7 12 15 22 23 28 32

3 Responde estas preguntas.

a. ¿Es posible que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Esto es posible con la moda?

b. ¿Por qué en la Tabla 4.17 la mediana resulta poco significativa?

x_i	3	12	2 000
f_i	50	1	50

Tabla 4.17

Resolución de problemas

4 Al lanzar un dado 60 veces se registraron los siguientes resultados de menor a mayor.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

a. ¿Cuál es el resultado obtenido con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál es el promedio de los resultados?

c. Si se lanza una vez más el dado, ¿cuál es el resultado más probable?

5 Halla las medidas de tendencia central de la distribución de la Figura 4.13 y describe la relación que hay entre ellas.

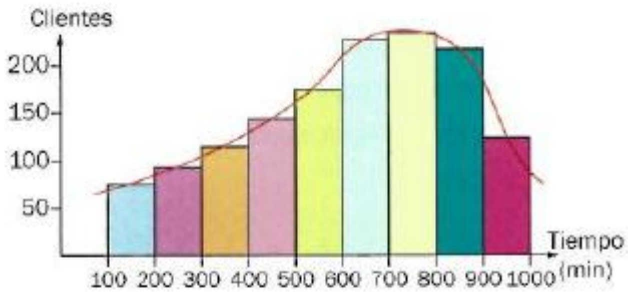


Figura 4.13

6 En una encuesta sobre movilidad, se preguntó a 1 000 conductores acerca del número de multas recibidas que ha sido mayor o igual que 0 y menor o igual que 5.

Número de conductores	210	260	150	190	100	90
Número de multas	0	1	2	3	4	5

Tabla 4.18

a. ¿Cuál es el dato central de la distribución?

b. ¿Cuál es la moda de los datos?

c. ¿Cuál es el promedio de multas recibidas por los conductores encuestados?

Evaluación del aprendizaje

Se registró el número de horas que 20 trabajadores dejaron de asistir a la oficina por problemas de salud el año pasado. Los datos obtenidos fueron estos:

0	3	4	8	10
12	12	15	15	17
19	21	21	23	25
26	32	33	40	60

a. ¿Cuál es el número de horas de absentismo laboral que ocurrió con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál fue el promedio de horas no trabajadas en este grupo de personas?