GUÍA DIDÁCTICA MATEMÁTICAS – GRADO NOVENO

PERIODO UNO

Objetivo general: Reconocer el uso y las propiedades de los números reales y sus operaciones en distintos contextos aplicados.
Objetivos Específicos Reconoce la estructura de los números reales mediante la interpretación de gráficos. Utilizar criterios para clasificar un conjunto de números en los diversos conjuntos numéricos.
Temas: • Números racionales y números irracionales • Números reales • Recta real • Potencias con exponente entero • Notación científica • Radicales • Racionalización. • Logaritmo de número real. • Estadística, definiciones. • Gráficas estadísticas; diagramas de barras, diagramas de puntos y líneas, diagramas circulares, pictogramas, histogramas.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS.

- Los saberes previos será la base de los conceptos para ser abordados y complementar lo que ya saben.
- Videos de apoyo para ser vistos previos y después de las clases.
- Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes, con el fin de que resulten motivadoras.
- Hacer uso de las TICS para retroalimentar, los conceptos de la unidad didáctica.
- Apoyo contante de los textos. Vamos a aprender matemática grado 9. Dispuestos en el aula para ser usados en clase.

NUMEROS RACIONALES Y NÚMEROS IRRACIONALES

NÚMEROS RACIONALES (Q): El conjunto de los números racionales está formado por el **cociente** entre dos números. Estos se pueden expresar como números naturales, enteros, decimales exactos o números decimales periódicos.

NÚMEROS IRRACIONALES (Q*): Está formado por todos los números decimales infinitos no periódicos.

Los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π,… son algunos números irracionales cuya representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas.
$\sqrt{2}$=1,414213… $\sqrt{93}$=2,080083…
$\sqrt{3}$=1,73205… π =3,1415926…

Vamos a complementar este concepto con este video.

Video, ¿Qué son realmente números reales?
https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ

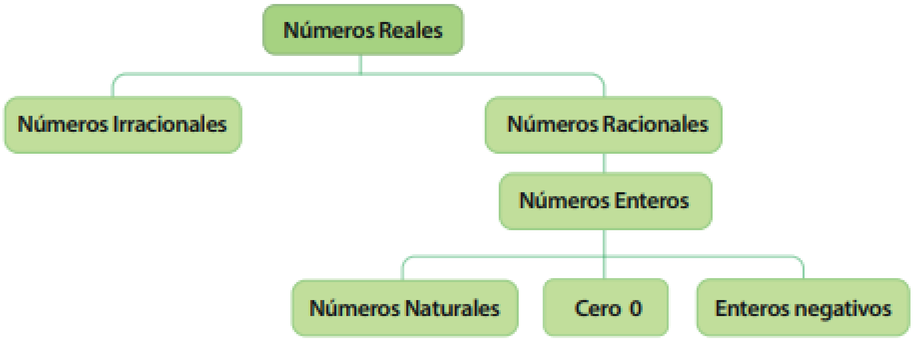
Actividad

1. Consultar la clasificación de los números irracionales algebraico y trascendentes.
2. Consulta cómo se clasifican las expresiones decimales de una fracción. Escribe dos fracciones cuya expresión decimal corresponda a cada tipo de decimal.
3. El largo y el ancho de una piscina olímpica es 50 m y 25 m, respectivamente. Si un nadador quiere recorrerla en diagonal, ¿Qué distancia recorre? ¿A que conjunto numérico pertenece este valor?
4. Ver el siguiente video y presentar un trabajo escrito donde de cuenta de las ideas fundamentales.

Video, **"Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables". Eduardo Sáenz de Cabezón https://www.youtube.com/watch?v=BbA5dpS4CcI&t=26s**

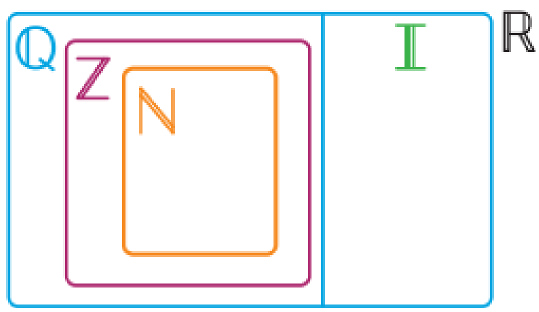
NÚMEROS REALES

Los NÚMEROS REALES son el resultado de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se simboliza con la letra $\mathbb{R}$. En el siguiente mapa se observa la formación del conjunto de los números reales:



ACTIVIDAD

1 **Observe y analice el diagrama dado, que muestra la relación de contenencia entre los conjuntos numéricos.**



2 **Basándose en el diagrama anterior complete las expresiones dadas con los signos $\subset$ (contenido) o = (igual) según la relación entre los conjuntos dados sea de contenencia o de igualdad.**

a) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z}$ ________ $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Z}$ ________ $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{I}$ ________ $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{Z}$ ________ $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{Q}$

g) $\mathbb{Q}$ ________ $\mathbb{R}$

h) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{R}$

i) $\mathbb{N}$ ________ $\mathbb{N}$

Actividad 3

1 **Determine si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). En todos los casos, justifique su respuesta.**

☐ a) Todos los números racionales son también números enteros.

____

☐ b) Algunos números enteros son irracionales.

____

☐ c) Todos los números racionales son también números reales.

____

☐ d) El 0 es un número entero pero no es un número racional.

____

☐ e) Todos los números reales son también números irracionales.

____

2 **En cada casilla escriba Sí, si el número dado es un elemento del conjunto indicado en la primera columna, en caso contrario escriba No.**

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{7}{9}$					
-8					
$\sqrt{3}$					
4					
0					
$\sqrt{9}$					
$\frac{\sqrt[3]{7}}{4}$					

POTENCIAS CON EXPONENTE ENTERO

Todo número real **a** elevado a un **exponente entero** negativo n, cumple que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedad. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, se tiene:	Ejemplo
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$8^4 \cdot 8^3 = 8^{4+3} = 8^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^8}{5^5} = 5^{8-5} = 5^3$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(-4^2)^4 = (-4)^{2 \cdot 4} = (-4)^8$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 7)^5 = 3^5 \cdot 7^5$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
$(a)^0 = 1, (a \neq 0)$	$(31)^0 = 1$
$(a)^1 = a$	$(45)^1 = 45$
$(a)^{-1} = \frac{1}{a}, (a \neq 0)$	$(13)^{-1} = \frac{1}{13}, \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{5^3}{2^3}$

Ejemplos

Observe cómo se redujo a una única potencia aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $\left(\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^{10}}\right)^{-3}$

$$\left(\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^{10}}\right)^{-3} = \left(\frac{3^8}{3^{10}}\right)^{-3} \longrightarrow \text{Se aplica el producto de potencias de igual base.}$$

$$= \left(\frac{3^{10}}{3^8}\right)^3 \longrightarrow \text{Se expresa con exponente positivo.}$$

$$= (3^2)^3 \longrightarrow \text{Se aplica el cociente de potencias de igual base.}$$

$$= 3^6 \longrightarrow \text{Se aplica la potencia de una potencia.}$$

b) $\left(\frac{x^4 y^2}{6z^5}\right)\left(\frac{3x^3 y^2}{z^3}\right)^2$

$$\left(\frac{x^4 y^2}{6z^5}\right)\left(\frac{3x^3 y^2}{z^3}\right)^2 = \left(\frac{x^4 y^2}{6z^5}\right)\left(\frac{9x^6 y^4}{z^6}\right) \longrightarrow \text{Se aplica potencia de una potencia.}$$

$$= \frac{3x^{10} y^6}{2z^{11}} \longrightarrow \text{Se aplica el producto de potencias de igual base.}$$

ACTIVIDAD

Aplicando las propiedades de potencias resolver

1 Escriba los números adecuados para que la igualdad sea verdadera.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = 128$

b) $\left(\frac{\square}{\square}\right)^{-6} = 64$

c) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{\square} = \frac{49}{25}$

d) $\left(\frac{\square}{\square}\right)^{0} = 1$

e) $\left(\frac{\square}{\square}\right)^{-4} = \frac{625}{81}$

f) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\square} = \frac{216}{125}$

g) $\left(\frac{\square}{\square}\right)^{8} = \frac{1}{256}$

h) $\left(\frac{-2}{5}\right)^{\square} = \frac{-8}{125}$

2 Escriba la expresiones usando exponentes positivos y realice la operación.

a) $(5^{-2}) - (5^{-3}) + (5^{-4}) =$

b) $[(-2)^{-2} \cdot (-3)^{-2} \cdot (-4)^{-2}]^{-1} =$

c) $\left(\frac{a^{-2}\, b^{-3}\, c^{2}}{a^{5}\, b^{2}\, c^{-1}}\right)^{-2} =$

d) $\frac{x^{-1}\, y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}} =$

Justifique el desarrollo de las siguientes expresiones por medio de las propiedades de la potenciación.

1.
$$\left[\frac{x^4y^2}{6z^5}\right]\left[\frac{3x^3y^2}{z^3}\right]^2 = \left[\frac{x^4y^2}{6z^5}\right]\left[\frac{9x^6y^4}{z^6}\right] \longrightarrow$$

$$= \frac{3x^{10}y^6}{2z^{11}} \longrightarrow$$

2.
$$\frac{7ab^{-4}}{a^{-2}b^{-5}} = \frac{(7a)\left(\frac{1}{b^4}\right)}{\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^5}\right)} \longrightarrow$$

$$= \frac{\frac{7a}{b^4}}{\frac{1}{a^2b^5}} \longrightarrow$$

$$= \frac{(7a)(a^2b^5)}{b^4} \longrightarrow$$

$$= 7a^3b \longrightarrow$$

RADICALES

Si n es un número entero positivo, entonces la raíz n-ésima de un número real a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ pues } b^n = a$$

Recuerde los elementos de la radicación:

Radical
Índice
Raíz

$$\sqrt[n]{a} = n$$

Radicando

Observe los siguientes ejemplos.

- $\sqrt[2]{0{,}25} = 0{,}5$ pues $0{,}5^2 = 0{,}25$
- $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ pues $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Recuerde las siguientes propiedades de la radicación:

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Actividad:

Resolver los siguientes ejercicios

1.

Escriba el resultado de cada operación. Luego, complete la tabla escribiendo como potenciación o como radicación según corresponda.

Radicación	Potenciación
$\sqrt[3]{\frac{125}{8}} =$	
	$(1{,}4)^2 =$
$\sqrt[2]{1{,}44} =$	
	$\left(\frac{0{,}5}{0{,}2}\right)^4 =$

2 Seleccione una expresión dentro de cada grupo y simplifíquela.

Grupo 1
$5^{\frac{3}{2}}, 4^{\frac{5}{3}}, 3^{\frac{5}{4}}$

Grupo 2
$(-2)^{\frac{7}{5}}, (-4)^{\frac{5}{3}}, (-6)^{\frac{6}{5}}$

Grupo 3
$x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{3}}, x^{\frac{5}{4}}$

Grupo 4
$(2m)^{\frac{3}{2}}, (2m)^{\frac{5}{3}}, (2m)^{\frac{5}{4}}$

Reducción de Radicales a índice común

Reducir a índice común dos más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

Ejemplo reducir a índice común los radicales

$$\sqrt{2m}, \sqrt[3]{2^2m^3}, \sqrt[4]{2f}$$

- Se halla el mínimo común múltiplo entre los índices. m.c.m (2,3,4) = 12

Que es el índice común de todos los radicales

- Se divide el m. c. m hallado por cada uno de los índices de los radicales ósea el 2, 3, 4.
- Cada resultado (6, 4, 3) se multiplica por los exponentes correspondientes en los radicandos, así:
  $\sqrt[12]{(2m)^6}, \sqrt[12]{2^8m^{12}}, \sqrt[12]{2^3f^3}$

Video de apoyo https://www.youtube.com/watch?v=FXQapwnod7A

Racionalización

La racionalización es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

Ejemplo 1

Para racionalizar la expresión $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$ cuyo **índice del radical** es 3, se amplifica la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un **factor racionalizante** que multiplicado por $\sqrt[3]{9h}$ dé como resultado $3h$. En este caso el factor es $\sqrt[3]{3h^2}$ porque $\sqrt[3]{3^2h}\cdot\sqrt[3]{3h^2}=3h$. Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{3^2h}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}}=\frac{3h\cdot\sqrt[3]{3h^2}}{3h}=\sqrt[3]{3h^2}$$

Ejemplo 2

Para racionalizar la expresión $\frac{5x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$, donde el denominador es un binomio, la fracción se amplifica por el conjugado del denominador, es decir, por el binomio con signo opuesto en el segundo término: $\sqrt{x}-\sqrt{2}$. La racionalización se hace así:

$$\frac{3x}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{3x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x-2}$$

Video https://www.youtube.com/watch?v=PI2TVst7Ibs racionalizar cuando es monomio

https://www.youtube.com/watch?v=AA_nVviMMvQ

https://www.youtube.com/watch?v=yMihgRNUHEQ https://www.youtube.com/watch?v=Dw7HrYXMJQc

https://www.youtube.com/watch?v=6NnKpx51LHw

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Simplifica cada expresión.

a. $\sqrt[5]{-32}+(-1)^{\frac{2}{3}}$

b. $\dfrac{-4^{\frac{1}{2}}-\sqrt[5]{-243}}{\sqrt{121}}$

c. $\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt[4]{16}}{\sqrt[18]{0}}$

d. $-64^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{100}$

2 Halla dos radicales equivalentes a cada radical.

a. $\sqrt[4]{5x}$

b. $\sqrt[8]{(7d)^{22}}$

c. $(27h)^{\frac{6}{7}}$

d. $56^{\frac{1}{3}}$

e. $\sqrt[16]{\left(\dfrac{g}{2}\right)^4}$

f. $\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{9}}$

3 Reduce a índice común los siguientes radicales.

a. $\sqrt[6]{15a^3x^2}\,,\sqrt{2a}\,,\sqrt[3]{3a^2b}$

b. $\sqrt[4]{5}\,,\sqrt{2}\,,\sqrt[3]{3}\,,\sqrt[6]{7}$

c. $\sqrt[6]{7a^3b}\,,\sqrt{5x}\,,\sqrt[3]{4x^2y}$

d. $\sqrt[4]{8a^2x^3}\,,\sqrt[6]{3a^5b^4}$

e. $\sqrt[5]{3a^2x}\,,\sqrt[3]{2ab}\,,\sqrt[15]{5a^3x^2}$

Razonamiento

4 Determina qué número es mayor en cada par de expresiones. Evita usar calculadora.

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ o $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $2^{\frac{1}{2}}$ o $2^{\frac{1}{3}}$

Resolución de problemas

6 Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión $t=\dfrac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.

7 La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r=\left(\dfrac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de 64π unidades cuadradas?

Evaluación del aprendizaje

i Completa la Tabla 1.13. Luego, responde.

n	$2^{\frac{1}{n}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$
1		
2		
5		
10		
100		

Tabla 1.13

a. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa?

b. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\dfrac{1}{2}$ cuando n se incrementa?

5 Racionaliza cada expresión.

a. $\dfrac{4ab}{\sqrt[3]{x^2y^3z^3b}}$

b. $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

c. $\dfrac{m^3n\sqrt{x}}{\sqrt[5]{2^4m^7n^6x}}$

d. $\dfrac{\sqrt{m+1}}{1-\sqrt{m+1}}$

e. $\dfrac{3ab^2}{\sqrt{ab^5}}$

f. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

g. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

h. $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}$

ii Escribe F si la proposición es falsa o V si es verdadera.

a. Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión.

b. Solo las expresiones con radicales de índice 2 se pueden racionalizar.

c. El factor racionalizante es una expresión que permite eliminar un radical.

d. El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos.

Logaritmo de un número real

El **logaritmo** de un número x de base a es un número y al cual se eleva la base a para obtener la potencia x, es decir:

$$\log_a x = y \quad \text{si y solo si} \quad a^y = x, \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Si en la expresión "log" no aparece el número que señala la base, significa que el logaritmo es en base 10.

Ejemplo 1

Al calcular los logaritmos $\log_5 125$, $\log 100\,000$ y $\log_4 \dfrac{1}{64}$ se obtiene que:

- $\log_5 125 = 3$, porque $5^3 = 125$
- $\log 100\,000 = 5$, porque $10^5 = 100\,000$
- $\log_4 \dfrac{1}{64} = -3$, porque $4^{-3} = \dfrac{1}{64}$

Propiedades de los logaritmos

Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifican las **propiedades de los logaritmos**, definidas en la Tabla 1.14 .

Propiedad	Ejemplos
$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$	$\log_3 9 \cdot 81 = \log_3 9 + \log_3 81$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_5 \frac{5}{125} = \log_5 5 - \log_5 125$
$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_7 343^5 = 5 \cdot \log_7 343$
$\log_a 1 = 0$, (para $a \neq 0$)	$\log_{18} 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_{15} 15 = 1$

Tabla 1.14

Ejemplo 2

Si $\log 2 = 0{,}3$, halla los logaritmos decimales de 20; 5 y 0,2.

Se escriben los números en función de potencias de 2 y de 10 (la base):

- $\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log(2) + \log(10) = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$
- $\log 5 = \log(10 \div 2) = \log(10) - \log(2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $\log 0{,}2 = \log(2 \div 10) = \log(2) - \log(10) = 0{,}3 - 1 = -0{,}7$

Cambio de base

Para **cambiar la base** de un logaritmo se utiliza la siguiente fórmula:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 3

Para demostrar que la fórmula de cambio de base de un logaritmo es válida, se parte de la definición de logaritmo:

$$\log_a x = y$$

- Luego se escribe esta expresión en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base b, en cada lado de la igualdad, así:

$$a^y = x \longrightarrow \log_b(a^y) = \log_b x$$

- Se aplican las propiedades correspondientes y se despeja y para obtener:

$$y \cdot \log_b a = \log_b x \qquad y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 4

Para calcular $\log_2 15$, se escribe en función de logaritmos en base 10. Llamando b al logaritmo buscado, se tiene que:

$$b = \log_2 15 \text{ si y solo si } 2^b = 15$$

- Se calcula el logaritmo decimal de ambos lados de la igualdad y se aplican las propiedades de los logaritmos. Entonces:

$$\log 2^b = \log 15 \qquad b \cdot \log 2 = \log 15 \qquad \log_2 15 \cdot \log 2 = \log 15$$

- Se despeja y se hacen los cálculos correspondientes, así:

$$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1{,}176}{0{,}301} = 3{,}907$$

El logaritmo de base e se llama **logaritmo natural** y se denota con ln. Es decir, $\log_e x = \ln x$, donde e es el número irracional trascendente 2,718281..., también llamado constante de Euler o constante de Napier.

Ejemplo 5

Para cambiar ln20 a base 10 se aplica la fórmula, así:

$$\ln 20 = \frac{\log 20}{\log e} \approx 2{,}996$$

En la calculadora solo es posible obtener resultados de logaritmos en base 10 y e; por ello, es necesario primero **cambiar la base de un logaritmo** a estas bases.

Ejemplo 6

El cambio de base del $\log_5 345$ a base 10 y e se muestra en la Tabla 1.15.

A base 10	A base e
$\log_5 345 = \frac{\log 345}{\log 5} \approx 3{,}6308$	$\log_5 345 = \frac{\ln 345}{\ln 5} \approx 3{,}6308$

Tabla 1.15

Se observa que el resultado aproximado de $\log_5 345$ es 3,6308.

Paso de una expresión algebraica a una logarítmica y viceversa

Para **convertir una expresión algebraica a una logarítmica** se aplica el logaritmo en la base escogida a ambos lados de la igualdad y luego se utilizan las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 7

Para convertir la expresión algebraica $R = \frac{m^3}{t^7 \cdot \sqrt{g}}$ a una logarítmica natural se procede así:

$$\ln R = \ln \frac{m^3}{t^7 \cdot \sqrt{g}}$$

$$\ln R = \ln m^3 - \ln t^7 - \ln \sqrt{g}$$

$$\ln R = 3 \cdot \ln m - 7 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \ln g$$

Para **convertir algunas expresiones logarítmicas a algebraicas** se aplican las propiedades de los logaritmos en sentido inverso.

Ejemplo 8

La expresión logarítmica $\log_5 M = \frac{1}{3} \log_5 f^9 + \log_5 f^3 - \frac{1}{2} \log_5 k$ se transforma en una algebraica así:

$$\log_5 M = \frac{1}{3} \log_5 f^9 + \log_5 f^3 - \frac{1}{2} \log_5 k$$

$$\log_5 M = \log_5 f^3 + \log_5 f^3 - \log_5 \sqrt{k}$$

$$\log_5 M = \log_5 (f^3 \cdot f^3) - \log_5 \sqrt{k}$$

$$\log_5 M = \log_5 \frac{f^6}{\sqrt{k}} \longrightarrow M = \frac{f^6}{\sqrt{k}}$$

Ejercitación

1 Expresa cada logaritmo en forma exponencial.

a. $\ln(x-1)=4$ b. $\ln y=5$

c. $\log_8 4=\frac{2}{3}$ d. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)=-3$

e. $\log_5 1=0$ f. $\log_{10} 0{,}1=-1$

2 Escribe cada potencia en forma logarítmica.

a. $e^{0.5x}=t$ b. $10^{-4}=0{,}0001$

c. $81^{1/2}=9$ d. $4^{-3/2}=0{,}125$

e. $8^{-1}=\frac{1}{8}$ f. $2^{-3}=\frac{1}{8}$

3 Halla el valor de cada logaritmo.

a. $\log_9 9$ b. $\log_4 64$

c. $\log_5 5^4$ d. $\log_3 3^2$

e. $\log_3 1$ f. $\log_3 3$

4 Aplica las propiedades de los logaritmos para simplificar cada expresión logarítmica.

a. $\log 12+\frac{1}{2}\log 7-\log 2$

b. $\log_3 5+5\log_3 2$

c. $\log_a b+c\log_a d-r\log_a s$

d. $\log_2 A+\log_2 B-2\log_2 C$

e. $2(\log_5 x+2\log_5 y-3\log_5 z)$

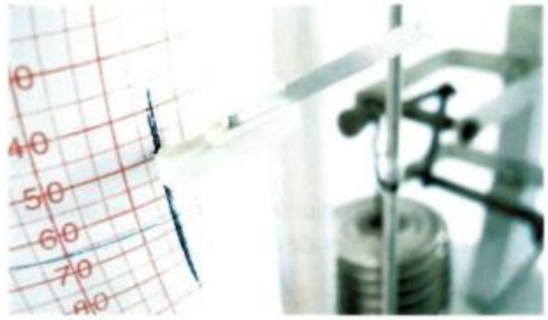
Resolución de problemas

5 La edad de un objeto antiguo puede determinarse por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por:

$$A=-8\,267\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentra la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en él es el 73% de la cantidad original D_0.

6 La magnitud de un terremoto según la escala de Richter se determina por $M=\log\frac{I}{S}$, donde I es la intensidad y S, la intensidad estándar. Si un sismo tiene $M=6{,}5$, ¿cuál es la magnitud de otro sismo con intensidad 35 veces mayor?



7 El pH de una sustancia está dado por $pH=-\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de los iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Las sustancias con un $pH=7$ son *neutras*, con $pH<7$ son *ácidas* y con $pH>7$ son *básicas*.

a. En una muestra de sangre humana se encontró que $[H^+]=3{,}16\cdot10^{-8}$ M. Determina el pH y clasifícalo.

b. La lluvia más ácida medida en la historia tuvo un pH de 2,4. Determina la concentración de iones de hidrógeno.

c. La concentración de iones de hidrógeno en claras de huevo frescas es $1{,}3\cdot10^{-8}$ M. Determina su pH y clasifica la sustancia.

Evaluación del aprendizaje

Utiliza las propiedades de los logaritmos y calcula.

a. $\log_5\sqrt[3]{x^2+1}$ b. $\log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$

c. $\ln\sqrt{ab}$ d. $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$

e. $\log\left(\frac{x^3y^4}{z^6}\right)$ f. $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

Videos de apoyo
https://www.youtube.com/watch?v=pZTuEHrnOMg&list=PLeySRPnY35dHyUzy-YVDD9ZlIhtXfcQ4

https://www.youtube.com/watch?v=C0BIfEB0eJM&list=PLeySRPnY35dHyUzy-YVDD9ZllhtXfcQ4_&index=2

https://www.youtube.com/watch?v=6kiXVr3mVp8&list=PLeySRPnY35dHyUzy-YVDD9ZllhtXfcQ4_&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=m5qBf1qJjEo&list=PLeySRPnY35dHyUzy-YVDD9ZllhtXfcQ4_&index=4 **Propiedades de los logaritmos**

Estadística

La **población** es el conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica.

La **muestra** es cualquier subconjunto de la población. Los elementos de la muestra se deben elegir de forma aleatoria.

Ejemplo 1

Si se desea elegir una muestra de 1000 personas de una población en la que el 60% son mujeres, se debe elegir al azar 600 mujeres y 400 hombres. De esta manera, los resultados obtenidos en esta muestra permitirán determinar conclusiones sobre la población con un margen de error mínimo.

Caracteres estadísticos y variables estadísticas

Un **carácter estadístico** es una propiedad que permite clasificar a los individuos de una población. Puede ser **cualitativo**, si no se puede medir, o **cuantitativo**, si se puede medir.

Ejemplo 2

En la Tabla 4.1 se muestra una manera de clasificar los caracteres estadísticos que pueden intervenir en un estudio estadístico cuya población son los empleados de una empresa.

Caracteres cualitativos	deporte que practica, comida favorita, profesión de los padres.
Caracteres cuantitativos	estatura, edad en años, cantidad de años en la empresa, y el peso

Tabla 4.1

Los caracteres estadísticos pueden tomar distintos valores. El conjunto de todos estos valores se denomina *variable estadística*. Las variables estadísticas pueden ser **discretas** o **continuas**.

Una **variable** es **discreta** cuando toma solamente valores aislados que se expresan mediante números naturales; y **continua**, cuando toma todos los valores posibles dentro de un intervalo.

Ejemplo 3

La edad en años es una variable estadística discreta, puesto que solo puede tomar valores como 12, 13, 14, etc., mientras que la estatura es una variable estadística continua porque puede tomar valores como 1,28 cm, 1,56 cm, 1,36 cm, etc.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. En un colegio hay 1250 estudiantes, de los cuales 610 son hombres. Si se elige una muestra de 100 personas, ¿cómo se deberá elegir la muestra para que sea representativa de la población? ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres deberán haber en la muestra elegida?

2. Considera la población formada por tus compañeros de clase. Para esta población, determina:
   a. Dos caracteres estadísticos cualitativos.
   b. Dos caracteres estadísticos cuantitativos de variable discreta y dos de variable continua.

Resolución de problemas

3. En una empresa de transporte público se quiere saber la opinión de los ciudadanos acerca del servicio que ofrece. Para ello, unos encuestadores entrevistan a los viajeros que acceden a este servicio en tres estaciones.

   a. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra?
   b. Describe la variable estudiada.

Evaluación del aprendizaje

En la década de 1930, en una ciudad se hizo una encuesta telefónica para pronosticar el ganador de las siguientes elecciones presidenciales. El pronóstico fue que ganaría el candidato *A*, pero en realidad ganó el candidato *B*.

a. ¿Cuál es la población?
b. ¿Cuál es el carácter estudiado?
c. ¿Crees que la muestra elegida fue representativa? ¿Por qué?
d. ¿Cómo se debió seleccionar la muestra de manera que los datos fueran confiables?

Estilos de vida saludable

Un estudio realizado en Colombia sobre el consumo de cigarrillo muestra que el 42,1% de los 32605 colombianos encuestados entre los 12 y 65 años han fumado alguna vez en su vida. Identifica la muestra y la población de este estudio.

- ¿Por qué fumar no hace parte de un estilo de vida saludable?

Gráficas estadísticas

Diagrama de barras

Se utilizan para comparar datos cualitativos o cuantitativos discretos

Diagramas de puntos y de líneas

Permiten representar las frecuencias absolutas de los datos para observar su variación con respecto al tiempo.

Diagramas circulares

Los **diagramas circulares** se utilizan para comparar los distintos valores que toma un carácter estadístico. Son recomendables cuando no existen muchos valores y para mostrar cómo se relacionan las partes con el todo.

Ejemplo

De un grupo de 80 personas encuestadas, 32 prefieren fútbol; 18, billar; 16, tenis; 10, natación, y 4, ciclismo. Las medidas de los ángulos centrales se calculan con la fórmula $a^\circ = \frac{f_{absoluta}}{N} 360^\circ$, donde N es el total de datos. Observa la Tabla 4.3 y la Figura 4.3.

Deporte	Fútbol	Billar	Tenis	Natación	Ciclismo
$f_{absoluta}$	32	18	16	10	4
a°	144°	81°	72°	45°	18°

Tabla 4.3

Figura 4.2

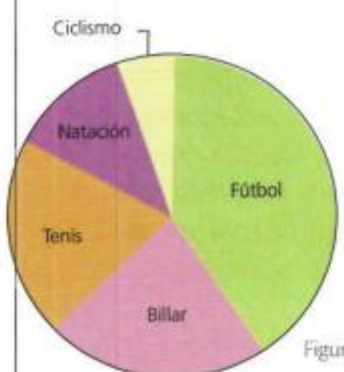


Figura 4.3

Pictogramas

Los **pictogramas** permiten sintetizar información estadística mediante símbolos que expresan cantidades específicas.

Ejemplo

En la Figura 4.4 se representan las cifras de reciclaje de una ciudad en el último año mediante un pictograma. De ella, se puede deducir que se han reciclado 48 000 toneladas de vidrio, 96 000 toneladas de papel y 120 000 toneladas de plástico.

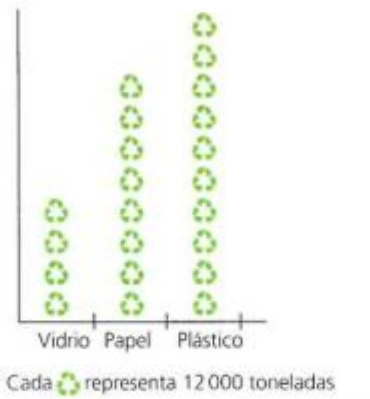


Figura 4.4

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 La Tabla 4.4 recoge los ingresos mensuales (miles de pesos) de una empresa en los primeros cuatro meses del año.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Ingresos	78 000	82 000	80 000	79 000

Tabla 4.4

Elabora con estos datos un diagrama de barras. ¿Qué escala utilizaste?

2 El consumo de minutos a celular de una persona en los últimos cuatro años fue de 48 500, 36 200, 15 700 y 36 400, respectivamente.

Representa con un diagrama de puntos y de líneas esta información.

Comunicación

3 Durante el año 2015 se registraron en las cinco principales actividades primarias del país las cifras de producción de la Tabla 4.5.

4 Consulta las cifras de tala de árboles en Colombia durante el último año. Dibuja un pictograma que represente esta información.

Evaluación del aprendizaje

El número de habitantes de diferentes pueblos, se muestra en la Tabla 4.6.

Pueblo	Frecuencia
A	72 000
B	216 000
C	144 000
D	96 000
E	48 000
F	24 000

Tabla 4.6

Representa la información en un diagrama de barras y en un pictograma. Utiliza una escala adecuada.

Actividad	Porcentaje de producción
Agricultura	36,1%
Ganadería	32,1%
Pesca	5,4%
Minería	20,3%
Explotación forestal	6,1%

Tabla 4.5

Representa con un diagrama circular esta información y compara los resultados.

Estilos de vida ...

Diseña una encuesta sobre el consumo de sustancias psicoactivas y aplícala de forma anónima a 20 personas. Organiza los datos en una tabla de frecuencias y representa los resultados. Luego, determina a qué edad inicia el consumo de estas sustancias. Consulta las consecuencias que esto trae para la salud.

Histogramas

Los **histogramas** permiten representar de manera gráfica las clases o intervalos de una distribución de frecuencias y las correspondientes frecuencias absolutas o relativas.

Ejemplo 1

En la Tabla 4.8 se registraron las masas de 5 000 pacientes de un hospital y en la Figura 4.6 el histograma correspondiente.

Masa (kg)	Número de pacientes
[0, 12)	100
[12, 24)	800
[24, 36)	1 400
[36, 48)	1 000
[48, 60)	700
[60, 72)	600
[72, 84)	400

Tabla 4.8

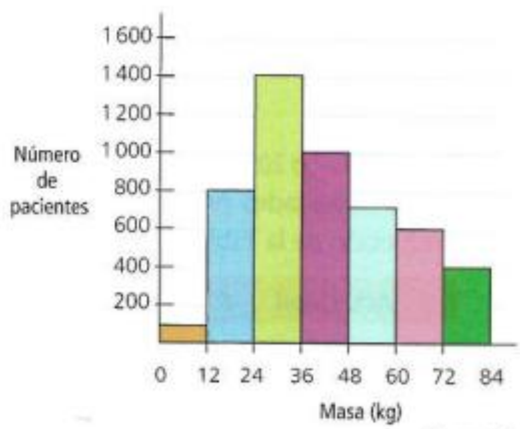


Figura 4.6

En el histograma se puede evidenciar que la mayor cantidad de pacientes entrevistados tiene una masa entre 24 kg y 36 kg.

También se observa que de las 5 000 personas estudiadas, solo 100 tienen una masa entre 0 kg y 12 kg.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 En un país se registró lo que han pesado los bebés al nacer (Tabla 4.9).

Masa (kg)	Niños	Niñas
[2; 2,5)	450	750
[2,5; 3)	1 050	900
[3; 3,5)	2 250	1 950
[3,5; 4)	600	450
[4; 4,5)	300	150

Tabla 4.9

a. ¿Cuántos niños y niñas se pesaron?

b. Representa mediante un histograma las masas de los niños, y mediante otro, las de las niñas.

c. ¿Cuál fue la masa más usual que se registró en la sala de recién nacidos?

2 En el histograma de la Figura 4.7 se registraron los ingresos mensuales que tienen 3 000 restaurantes de una ciudad.

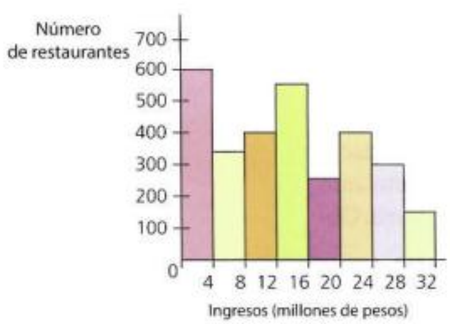


Figura 4.7

Responde las preguntas.

a. ¿Cuántos restaurantes tienen ingresos entre los 20 y 24 millones?

b. ¿Qué porcentaje de restaurantes tiene ingresos entre los 12 y 16 millones de pesos?

c. ¿Qué porcentaje de restaurantes tiene ingresos inferiores a los 20 millones de pesos?

Evaluación del aprendizaje

Se realizó un estudio sobre los meses de edad que tenían unos bebés en el momento que comenzaron a caminar. Los resultados se expresaron mediante el histograma de la Figura 4.8.

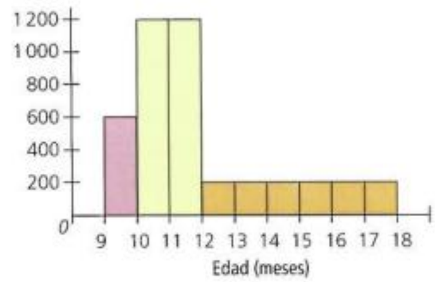


Figura 4.8

Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos bebés se observaron para realizar el estudio?

estudio?

b. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 10 y los 12 meses?

c. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 12 y los 18 meses?

d. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 9 y los 12 meses?

Educación ambiental

Pregunta a tus compañeros de clase cuál ha sido el consumo de agua en sus hogares en el último periodo de facturación. Elabora un histograma con los datos y explica los resultados. .

- ¿Cómo puedes hacer uso eficiente del agua?

¿Cómo puedes hacer uso eficiente del agua? ¿Qué consejos le darías a aquellas personas que no hacen uso responsable de este recurso?