YERMO Y PARRES

INSTITUCION EDUCATIVA

GUIA DIDACTICA: 2,3,4 PERIODO	GRADO(S): OCTAVO	AÑO 2025
MATERIA : MATEMÁTICAS		
NOMBRE DEL DOCENTE: HILDA EUGENIA HOYOS LONDOÑO		SECCION: YERMO
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:		GRUPOS:

Tema 1: Reducción de términos semejantes

Para reducir términos semejantes se realiza la suma algebraica de las partes numéricas y se le pospone la común parte literal:

$$-5xy + 2xy = (-5 + 2)Xy = -3xy$$

Ejemplos

1. $3a + 4a = 7a$
2. $3xy - 5xy = -2xy$
3. $-5a^2b - 7a^2b = -12a^2b$
4. $-2x^2 - 5x^2 + 9x^2 = 2x^2$

Ejercicios. Reducir:

1. $3a^2 + a^2$
2. $-x^3 - 5x^3$
3. $x - 2x$
4. $5xy - 8xy$
5. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^2$
6. $xy^2 + \frac{3}{8}xy^2$
7. $-\frac{5}{6}mn^2 + \frac{3}{8}mn^2$
8. $8b - 4b + 5b$
9. $-10y + 11y - 2y$
10. $3y^n - 6y^n - 4y^n$
11. $\frac{2}{3}xy - \frac{5}{3}xy + xy$

Tema 2: Reducción de polinomios

Para reducir un polinomio que contiene diversos términos semejantes se reducen cada uno de los términos semejantes y se separan con el signo +:

$$\begin{aligned} -3xy - 2mn + 7xy - 6mn &= (-3 + 7)xy + (-2 - 6)mn \\ &= 4xy + (-8)mn \\ &= 4xy - 8mn \end{aligned}$$

Ejemplos

1. $2x^3 + 3x^2 - 7x^2 + 5x^3 = 7x^3 + (-4x^2) = 7x^3 - 4x^2$
2. $-5x - 3y - 7z + 1 + 7x - 2z - 3 = 2x - 3y + (-9)z + (-2)$
   $= 2x - 3y - 9z - 2$

Ejercicios. Reducir las siguientes expresiones

12. $9x - 11y + 8x - 6y$
13. $m + n - p - n - p + 2p - x$
14. $-83x + 21y - 28z + 6y + 82x - 25y + x$
15. $3x^2 + 2x - 5 - 4x^2 + x + 3$
16. $x + y + z - 2x - 6y + 3z + x + 5y - 8z$
17. $xy + yz + z - 8xy - 3yz - 3z + 5xy + 2yz - 2z$

Tema 3: Multiplicación de monomios

Ley del producto de potencias de igual base: Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base elevada a la suma de los exponentes de las potencias:

$$m^2m^3 = m^{2+3} = m^5 \qquad x^3 \times x^4 \times x^2 = x^9 \qquad y^{2m}y^{3m} = y^{5m} \qquad x^nx^3 = x^{n+3}$$

$$a^na^m = a^{n+m}$$

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y luego se efectúa el producto de las partes literales teniendo en cuenta la ley del producto de potencias de igual base:

$$\begin{aligned}(-3x^2y^3)(4x^3y) &= (-3 \times 4)x^{2+3}y^{3+1}\\ &= -12x^5y^4.\end{aligned}$$

Ejemplos

1. $6a^2 \times 4a^3 = 24a^5$
2. $(-x^3y^4)(-5xy^2) = 5x^4y^6$
3. $(-2a^3b^n)(3a^2b^3) = -6a^5b^{n+3}$
4. $(-x^2y^3)(3x^2y^m)(-5x^3y^n) = 15x^7y^{m+n+3}$

Ejercicios. Realice los siguientes productos

18. $(5x^3)(4x^5)$
19. $(3ab^4)(-2a^3b^2)$
20. $-7(-x^6y)(-x^6y^5)$
21. $(x^n)(x^{3n})$
22. $(2xyz^2)(3xy^3z)(4x^4yz)$

Tema 4: Monomio×polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio aplicamos la ley distributiva y luego la multiplicación de monomios:

$$\begin{aligned}3a^2b^3(2ab^3 - 4a^3b^2) &= (3a^2b^3)(2ab^3) + (3a^2b^3)(-4a^3b^2)\\ &= 6a^3b^6 - 12a^5b^5.\end{aligned}$$

Ejemplos

1. $\begin{aligned}[t]-3a^2(4a^3 - a^2 + 3a - 2) &= (-3a^2)(4a^3) + (-3a^2)(-a^2) + (-3a^2)(3a) + (-3a^2)(-2)\\ &= -12a^5 + 3a^4 - 9a^3 + 6a^2.\end{aligned}$
2. $\begin{aligned}[t]-3x^2y^3(2xy^2 - 3x^2y^2 + xy) &= (-3x^2y^3)(2xy^2) + (-3x^2y^3)(-3x^2y^3) + (-3x^2y^3)(xy)\\ &= -6x^3y^5 + 9x^4y^6 - 3x^3y^4.\end{aligned}$

✍ En la practica suele omitirse el paso intermedio:

$$-3a^2(4a^3 - a^2 + 3a - 2) = -12a^5 + 3a^4 - 9a^3 + 6a^2.$$

Ejercicios. Realice los siguientes productos

23. $-3x^2(4x^2 - 2x + 7)$
24. $\frac{1}{2}a^3b^2(2a^2 + 5ab - b^2)$
25. $5y^3(3 - 6y + 2y^2)$
26. $-6ab^4(4a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}b^2)$
27. $2xyz^2(3xz - 6yz - xy - 1)$

Tema 5: Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la ley distributiva repetidamente:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d)+b(c+d)\\ &= ac+ad+bc+bd.\end{aligned}$$

Ejemplos

1. $(2-3a)(4+3a) = 2(4+3a)+(-3a)(4+3a) = 8+6a-12a-9a^2$
   $= 8-6a-9a^2.$

2. $(2-x)(3-2x-5x^2) = 2(3-2x-5x^2)+(-x)(3-2x-5x^2)$
   $= 6-4x-10x^2-3x+2x^2+5x^3$
   $= 6-7x-8x^2+5x^3.$

✍ En la practica suele omitirse el primer paso, multiplicando todos los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor:

$$\begin{aligned}(2-3a)(4+3a) &= 8+6a-12a-9a^2\\ &= 8-6a-9a^2.\end{aligned}$$

Ejercicios. Expanda los siguientes productos

28. $(2x+3)(x-7)$
29. $(5s-6t)(2s+3t)$
30. $(7a^2-2b)(5a^2+3b^2)$
31. $(3x+5y)(3x^2-xy+4y^2)$
32. $(2x^2+4x-3)(x^2-6x+5)$

Tema 6: Producto notable I

Ley de la potencia de una potencia: Para hallar la potencia de una potencia se deja la misma base y se eleva al producto de los exponentes:

$$(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6 \qquad (x^3)^4 = x^{12} \qquad (y^3)^m = y^{3m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Ley de la potencia de un producto: Para hallar la potencia de un producto se elevan cada uno de los factores al exponente indicado:

$$(3xy)^2 = 3^2x^2y^2 = 9x^2y^2 \qquad (2ab^2)^3 = 2^3a^3(b^2)^3 = 8a^3b^6$$

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Fórmula: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Ejemplos

1. $(x+3)(x-3) = x^2-3^2$
   $= x^2-9.$

2. $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2-(3b)^2$
   $= 4a^2-9b^2.$

3. $(x+y)(y-x) = (y+x)(y-x)$
   $= (y^2-x^2)$

4. $(x^3+2y)(x^3-2y) = (x^3)^2-(2y)^2$
   $= x^6-4y^2.$

Ejercicios. Expanda los siguientes productos

33. $(a+10)(a-10)$
34. $(x^3-5y^2)(x^3+5y^2)$
35. $(-b+a)(b+a)$
36. $(3+x)(x-3)$
37. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$
38. $(2xy-4)(4+2xy)$

Tema 7: Producto notable II

Fórmula: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Ejemplos

1. $(x-3)^2 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$
2. $\left(2x+3y^3\right)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y^2) + \left(3y^2\right)^2 = 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4.$

Ejercicios. Expanda los siguientes productos

39. $(a-3)^2$
40. $(x+7)^2$
41. $(9-y)^2$
42. $(2x-3y)^2$
43. $(4ax-1)^2$
44. $(x^3-y^3)^2$

Tema 8: Producto notable III

Fórmula: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $\qquad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ejemplos

1. $(x+2)^3 = x^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
2. $\left(2x-y^3\right)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2y^3 + 3(2x)(y^3)^2 - (y^3)^3 = 8x^3 - 12x^2y^3 + 6xy^6 - y^9$

Ejercicios. Expanda los siguientes productos

45. $(x+2)^3$
46. $(y-1)^3$
47. $(3y-2)^3$
48. $(2x-3)^3$
49. $(1-y^2)^3$

Tema 9: Division de monomios

Ley de la división de potencias de igual base: Para dividir potencias de la misma base se escribe la misma base elevada a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor:

$$x^5 \div x^3 = x^2 \qquad \frac{y^5}{y^2} = y^3 \qquad \frac{x^n}{x^3} = x^{n-3}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

☞ Recuerde que $x^0 = 1$ para cualquier número x.

Para dividir dos monomios se simplifican los coeficientes y luego se efectúa la división de las partes literales teniendo en cuenta la ley de la división de potencias de igual base.

Ejemplos

1. $-6a^5 \div 2a^3 = -3a^2$.
2. $\dfrac{-12x^3y^3}{-20xy^2} = \dfrac{3}{5}x^2y$.
3. $\dfrac{-2x^3y^n}{3x^2y^3} = -\dfrac{2}{3}xy^{n-3}$.
4. $\dfrac{3x^2y^m}{5x^2y^n} = \dfrac{3}{5}y^{n-m}$.

Ejercicios. Simplifique:

50. $\dfrac{9a^9b^4}{3a^3b^2}$

51. $\dfrac{4x^8y^6z^4}{32x^7y^2z}$

52. $\dfrac{12y^{12}}{6y^6}$

53. $\dfrac{4r^6s^9}{6r^3s^3}$

54. $\dfrac{x^{n+3}}{x^{n+2}}$

55. $\dfrac{2x^{n+8}}{x^{n-3}}$

56. $\dfrac{-7/8x^n y^m}{-3/4xy^2}$

57. $\dfrac{-4x^{n-2}y^m}{-5x^3y}$

Tema 10: polinomio÷monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se utiliza la propiedad distributiva:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Ejemplos

1. $$\frac{14a^5 - 4a^4 + 10a^3}{-2a^2} = \frac{14a^5}{-2a^2} + \frac{-4a^4}{-2a^2} + \frac{10a^3}{-2a^2}$$
$$= -7a^3 + 2a^2 - 5a.$$

2. $$\frac{-45x^3y^3z^{3n} + 5xy^4z^3}{15xy^2z^n} = \frac{-45x^3y^3z^{3n}}{15xy^2z^n} + \frac{5xy^4z^3}{15xy^2z^n}$$
$$= -3x^2yz^{2n} + \frac{1}{3}y^3z^{3-n}.$$

✍ En la practica suele omitirse el paso intermedio:

$$\frac{14a^5 - 4a^4 + 10a^3}{-2a^2} = -7a^3 + 2a^2 - 5a$$

Ejercicios. Simplifique:

58. $\dfrac{35u^2v^3 - 20u^3v^2}{-5u^2v}$

59. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x}{x}$

60. $\dfrac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3}$

61. $\dfrac{6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3}{3a^2b^3}$

62. $\dfrac{x^n + x^{m+1}}{x^2}$

63. $\dfrac{2y^n - 3y^{n+2} + 6y^{n+4}}{-3y^3}$

Tema 11: división de polinomios

Pretendemos realizar la división $\dfrac{6x^3 - 11x^2 - x + 6}{2x - 3}$. Utilizaremos la notación

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

- Buscamos una expresión que multiplicada por $2x$ (primer término del divisor $2x - 3$) nos de $6x^3$ (primer termino del dividendo). El término buscado es $3x^2$. Este es el primer término del cociente.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

- Multiplicamos $3x^2$ por el divisor. Obtenemos $3x^2(2x - 3) = 6x^3 - 9x^2$. Colocamos esta expresión debajo del dividendo con los signos cambiados

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-6x^3 + 9x^2} \end{array}$$

- Hacemos la reducción correspondiente (da $-2x^2$) y bajamos el termino $-3x$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-6x^3 + 9x^2} \\ & \qquad -2x^2 - 3x \end{array}$$

- Buscamos una expresión que multiplicada por $2x$ nos de $-2x^2$; esta es $-x$ y es el segundo término del cociente. Se hace la multiplicación $-x(2x - 3) = -2x^2 + 9$, se cambian los signos de los coeficientes, reducimos y bajamos el 2

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - x \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-6x^3 + 9x^2} \\ & \qquad \underline{-2x^2 - 3x} \\ & \qquad 2x^2 - 3x \\ & \qquad\qquad -6x + 2 \end{array}$$

- Por último, buscamos una expresión que multiplicada por $2x$ nos de $-6x$. Esta es 3 y es el tercer miembro del cociente. $-3(2x - 3) = -6x + 9$, le cambiamos los signos y reducimos

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - x - 3 \\ \hline 2x-3 & 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-6x^3 + 9x^2} \\ & \qquad \underline{-2x^2 - 3x} \\ & \qquad 2x^2 - 3x \\ & \qquad\qquad -6x + 2 \\ & \qquad\qquad \underline{6x - 9} \\ & \qquad\qquad\quad -7 \end{array}$$

-7 es el residuo de esta división. Por tanto

$$\frac{6x^3 - 11x^2 - x + 6}{2x - 3} = 3x^3 - 2x - 3 - \frac{7}{2x - 3}$$

✍ Para probar la división debe comprobarse (hágalo) que

$$\text{Dividendo} \longrightarrow 6x^3 - 11x^2 - x + 6 = \underset{\text{Divisor}}{\underset{\downarrow}{(2x-3)}}\underset{\text{Cociente}}{\underset{\downarrow}{(3x^3 - 2x - 3)}} - 7 \longrightarrow \text{Residuo.}$$

✍ Antes de realizar una multiplicación ordene descendentemente los polinomios involucrados. Si alguno de los polinomios está incompleto se completa agregando uno termino de coeficiente cero cuya parte literal respete el orden descendente de los exponentes.

Ejercicios. Realice las siguientes divisiones

64. $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 1}$

65. $\dfrac{5x + 12x^2 - 2}{2 + 3x}$

66. $\dfrac{a^3 + 3 - a - 3a^2}{a - 2}$

67. $\dfrac{y^3 - 6y + 5}{y^2 + 3y - 2}$

68. $\dfrac{t^3 - 7t - 6}{t + 2}$

Tema 12: División sintetica

Se utiliza la división sintética para dividir un polinomio de una sola variable (ordenado descendentemente) entre un factor de la forma $x - a$.

Ejemplo

Utilizaremos la división sint´etica para hallar el cociente y el residuo al dividir $5x^3 - 4x^2 - 1$ entre $x - 2$. En general los pasos son:

1. Escribimos en una fila los coeficientes del polinomio dividendo (anotando un coeficiente cero cuando falte algún t´ermino) y debajo y más a la derecha el opuesto de t´ermino independiente del divisor separados por una linea. Trazamos, además, una linea horizontal.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & & & & \\ \hline \end{array}$$

2. Bajamos el 5. Multiplicamos 5 por 2 y el producto lo colocamos exactamente debajo del -4

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & & 10 & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3. Reducimos. Obtenemos 6.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & & 10 & & \\ \hline & 5 & 6 & & \end{array}$$

4. Repetimos los pasos 2. y 3. tanto como sea posible.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & & 10 & 12 & 24 \\ \hline & 5 & 6 & 12 & 23 \end{array}$$

El último número en la fila inferior es el residuo de la división y los números precedentes son los coeficientes de los t´erminos sucesivos del cociente. En nuestro ejemplo, el cociente es pues $5x^2 + 6x + 12$ y el residuo es 23.

$$\text{Dividendo} \longrightarrow 5x^3 - 4x^2 - 1 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Divisor}}}{(x-2)}\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Cociente}}}{(5x^2+6x+12)} + 23 \longrightarrow \text{Residuo}$$

✍ La respuesta de la división anterior es $5x^2 + 6x + 12 + \frac{23}{x-2}$. Es decir

$$\frac{5x^3 - 4x^2 - 1}{x-2} = 5x^2 + 6x + 12 + \frac{23}{x-2}$$

Ejercicios. Utilice el método de la división sintética para realizar las siguientes divisiones

69. $\dfrac{12 - 3x^2 + 2x}{x+1}$

70. $\dfrac{t^3 - 7t - 6}{t+2}$

71. $\dfrac{3t^4 - 2t^3 + 3t - 5}{t-1}$

72. $\dfrac{2t^3 + 3t^2 - 3t - 8}{t+2}$

73. $\dfrac{12 + 7t^2 + 5t^3}{2+t}$

74. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 10}{x-3}$

Miscelanea. Realice las operaciones indicadas

75. $13ab + 2ab$

76. $7a - 13b - 11 + 20a - 4 - 3b$

77. $(x^4y^3)(2xy)$

78. $5(-4r^2s^2)(3r^2s^3)$

79. $-4(9a - 5b)(a + 3b)$

80. $(3r - 2s)(3r + 2s)$

81. $\dfrac{a^3 + 3 - a - 3a^2}{a-2}$

82. $\dfrac{x^3 - 27}{x-3}$

84. $3x - (-x + y + 2) - (y + x - 4)$

85. $y(4y + 1)^2$

86. $(a + 10)(a - 10)$

87. $\dfrac{-7x^{m+3}y^{n-1}}{14x^4y^2}$

88. $\dfrac{x^{m+2} - 5x^m + 6x^{m+1} - x^{m-1}}{x^{m-2}}$

89. $\dfrac{2t^4 + t^3 - 3t^2 - 4t + 4}{t-2}$

90. $(6x^2yz^3)(-3x^3z^4)(2y^4z)$

83. $\frac{3}{5}x^2y^3 - \frac{1}{10}x^2y^3$

91. $(a - 6)(3a^2 - 4a + 2)$

92. $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

93. $-x(x - 7)^2$

94. $(2xyz^2)(3xy^3z)(4x^4yz)$

95. $\dfrac{-7/8x^n y^m}{-3/4xy^2}$

96. $\dfrac{x^n y^n + x^{n-1}y^{n+2} - x^{n-2}y^{n+4}}{x^2y^3}$

97. $\dfrac{2t^3 - 3t^2 + 4t}{t - 1/2}$

98. $-\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x$

99. $3x^{2n}(x^{n+1} - 4x^n + 5)$

100. $(3x^n - 5y^m)(3x^n + 5y^m)$

101. $\dfrac{3x^{20}y^{12}z^{16}}{(-x^9y^3z^3)(-9x^4y^6z^4)}$

102. $\dfrac{a^2b - ab^3}{ab}$

103. $\dfrac{x^5 + 4x^3 - 5x}{x + 1}$

104. $x^{2n-1}\ 2x^{2n+1} - x^{2n} + 3x - 1$

105. $(3x^{2m} + y^{2m})(4x^{2m} - 5y^{2m})$

106. $(3t^2 + 2t + 1)(-2t^2 - 5t + 6)$

107. $(5 - y)^2$

108. $\dfrac{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x}{-5x}$

109. $\dfrac{-4x^{n-2}y^m}{-5x^3y}$

Tema 13: factor común

Para factorizar un polinomio que tiene un factor común escribimos el polinomio como el producto del factor y el cociente obtenido por la división del polinomio original entre el factor común. En la practica se hace uso de la ley distributiva.

Ejemplos

1. Factorizar $ax - ay + az$.

   La letra a es un factor común de cada uno de los t´erminos del polinomio, por ser la letra que se repite. Entonces

   $$ax - ay + az = a(x - y + z).$$

2. Factorizar $12x^2y^5 - 30x^3y^3z$.

   Los coeficientes 12 y 30 tienen divisores comunes 2, 3, y 6. Tomamos el 6 por ser el mayor. Tomamos las letras que se repiten con su menor exponente, x^2y^3. Entonces un factor común de $12x^2y^5$ y $30x^3y^3z$ es $6x^2y^3$. As´ı que

   $$12x^2y^5 - 30x^3y^3z = 6x^2y^3\ 2y^2 - 5xz\ .$$

3. Factorizar $3x + 6x^2 - 9x^3$.

   El factor común es $3x$. Entonces

   $$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x\ 1 + 2x - 3x^2$$

Ejercicios. Factorizar:

110. $ab - bc$

111. $x^2 + xy$

112. $-x^2 - x$

113. $-5m^2 - 15m^3$

114. $-9a^3x^2 - 18ax^3$

115. $15x^3y^2 + 60x^3y^3$

116. $-a^3 - a^2 - a$

117. $4x^2 - 8x + 2$

118. $-x^3 - x^2y - xy^2$

Tema 14: Factor común polinomio

Algunas veces el factor común es un polinomio.

1. Factorizar $x(m - n) + y(m - n)$.

   El factor común es $m - n$. Entonces

$$x(m - n) + y(m - n) = (m - n)(x + y).$$

2. Factorizar $(y + 3)(x - 2) + (x - 2)(y - 6)$.

   El factor común es $(x - 2)$, entonces

$$\begin{aligned}(y + 3)(x - 2) + (x - 2)(y - 6) &= (x - 2)[(y + 3) + (y - 6)]\\ &= (x - 2)(2y - 3)\end{aligned}$$

3. Factorizar $x(m + n) - m - n$.

   Introduciendo los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo $-$, tenemos que

$$x(m + n) - m - n = x(m + n) - (m + n) = (m + n)(x - 1).$$

Ejercicios. Factorizar:

119. $x(y + 1) + z(y + 1)$

120. $x(y + 1) - y - 1$

121. $y^2 + 1 - x(y^2 + 1)$

122. $4x(y - z) + z - y$

123. $x - y + x(x - y)$

124. $(x - 2)(a - 3) - 4(a - 3)$

125. $(2x - 1)(n - 3) - (x + 3)(n - 3)$

126. $(y + 3)(3x - 2) - (x - 2)(y + 3)$

127. $(3y + 2)(x - 4) - (x - 4)(y - 4)$

Tema 15: Factor común por agrupación

Ejemplos

1. Factorizar $x^2 + yz + xy + xz$

   Agrupamos, por ejemplo, el primer y tercer término en un paréntesis (porque tienen factor común x) y el resto en otro paréntesis (porque tienen factor común z). Entonces

$$\begin{aligned}x^2 + yz + xy + xz &= (x^2 + xy) + (yz + xz)\\ &= x(x + y) + z(x + y)\\ &= (x + y)(y + z)\end{aligned}$$

2. Factorizar $y^2 + 3y - 2xy - 6x$

$$\begin{aligned} y^2 + 3y - 2xy - 6x &= (y^2 + 3y) + (-2xy - 6x) \\ &= y(y + 3) - 2x(y + 3) \\ &= (y + 3)(y - 2x) \end{aligned}$$

Ejercicios. Factorizar:

128. $xy - zy + xz - z^2$
129. $ax - 2bx - 2ay + 4by$
130. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
131. $4a^3 - 4a^2 + 3m - 3am$
132. $6ax + 3a + 1 + 2x$
133. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
134. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$
135. $a^3 + a^2 + a + 1$
136. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

Tema 16: factorización de trinomios I

- Fórmula $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

Ejemplos

1. Factorizar $x^2 + 8x + 15$.

   Dos números cuya suma algebraica es 8 y multiplicados 15 son 3 y 5, en efecto: $3 + 5 = 8$ y $3 \times 5 = 15$. Entonces

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

2. Factorizar $x^2 + 3x - 4$.

   Dos números cuya suma algebraica da 3 y multiplicados -4 son 4 y -1, en efecto: $4 - 1 = 3$ y $4 \times (-1) = -4$. Entonces

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

3. Factorizar $x^2 - 2x - 15$.

   Como $-5 + 3 = -2$ y $-5 \times 3 = -15$, entonces

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

4. Factorizar $x^2 - 3x + 2$.

   Como $-1 - 2 = -3$ y $-1 \times (-2) = 2$, entonces

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Ejercicios. Factorizar.

137. $x^2 - 7x + 10$

138. $x^2 + 3x + 2$

139. $x^2 - 3x + 2$

140. $x^2 + 3x - 28$

141. $x^2 + 6x - 7$

142. $a^2 - 9a + 8$

Tema 17: factorización de trinomios II

1. Factorizar $x^8 - 3x^4 - 4$.

   El polinomio puede escribirse en la forma $x^4\ {}^2 - 3x^4 + 2$ y así, como $-4 + 1 = -3$ y $-4 \times 1 = -4$, entonces

$$x^8 - 3x^4 + 2 = (x^4 - 4)(x^4 + 1)$$

2. Factorizar $x^2y^2 - 3xy + 2$.

   El polinomio puede escribirse en la forma $(xy)^2 - 3(xy) + 2$ y así, como $-1 - 2 = -3$ y $-1 \times (-2) = 2$, entonces

$$x^2y^2 - 3xy + 2 = (xy - 1)(xy - 2)$$

Ejercicios. Factorizar:

143. $x^4 + 3x^2 - 28$

144. $y^6 - 5y^2 - 24$

145. $x^2 + 3x + 2$

146. $x^4y^2 + x^2y - 2$

147. $x^4y^6 - 2x^2y^3 - 48$

148. $2 + x - x^2$

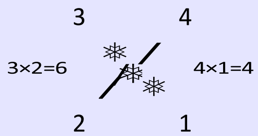
Tema 18: factorización de trinomios III

- Fórmula $abx^2 + (ab + bc)x + cd = (ax + c)(bx + d)$.

Ejemplos

1. Factorizar $6x^2 + 11x + 4$.

   Realizamos el siguiente diagrama con dos pares de números cuya multiplicación sea 6 y 4.

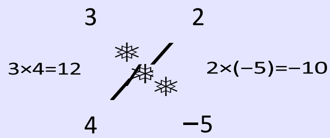


   Como $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$, entonces

$$6x^2 + 11x + 4 = (3x + 4)(2x + 1)$$

2. Factorizar $12x^2 - 7x - 10$.

   Realizamos el siguiente diagrama con dos pares de números cuya multiplicación sea 12 y -10.



   Como $3(-5) + 2 \cdot 4 = -7$, entonces

$$12x^2 - 7x - 10 = (3x + 2)(4x - 5)$$

Ejercicios. Factorizar:

149. $2y^2 + 3y - 2$

150. $3y^2 - 5y - 2$

151. $12x^2 - x - 6$

152. $4y^2 + 15y + 9$

153. $3 + 11a + 10a^2$

154. $5y^2 + 13x - 6$

Tema 19: factorización de trinomios IV

- Fórmula $abx^2 + (ad + bc)xy + cdy^2 = (ax + cy)(bx + dy)$.

Ejemplos

1. Factorizar $6x^2 + 11xy + 4y^2$.

   Realizamos el siguiente diagrama con dos pares de números cuya multiplicación sea 6 y 4 (resp.).

   $$\begin{array}{cccc} & 3 & & 4 \\ 3\times2=6 & & \diagup & 4\times1=4 \\ & 2 & & 1 \end{array}$$

   Como $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$, entonces

   $$6x^2 + 11x + 4 = (3x + 4y)(2x + y)$$

1. Factorizar $12y^2 - 7xy - 10x^2$.

   Realizamos el siguiente diagrama con dos pares de números cuya multiplicación sea 12 y -10 (resp.).

   $$\begin{array}{cccc} & 3 & & 2 \\ 3\times4=12 & & \diagup & 2\times(-5)=-10 \\ & 4 & & -5 \end{array}$$

   Como $3(-5) + 2 \cdot 4 = -7$, entonces

   $$12y^2 - 7xy - 10x^2 = (3y + 2x)(4y - 5x)$$

Ejercicios. Factorizar:

155. $12x^2 - xy - 6y^2$
156. $3y^2 - 5xy - 2x^2$
157. $5y^2 + 13x - 6x^2$
158. $2y^2 + 3xy - 2x^2$
159. $3x^2 + 11ax + 10a^2$
160. $4y^2 + 15yx + 9x^2$

Tema 20: Diferencia de cuadrados

- Fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

1. Factorizar $x^2 - 4$.

   Extraemos la raíz cuadrada (positiva) de ambos términos, $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{4} = 2$. Entonces

   $$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

2. Factorizar $64x^2 - 25y^4$.

   Extraemos la raíz cuadrada (positiva) de ambos términos, $\sqrt{64x^2} = 8x$, $\sqrt{25y^4} = 5y^2$. Entonces

   $$64x^2 - 25y^4 = (8x + 5y^2)(8x - 5y^2)$$

Ejercicios. Factorizar:

161. $x^2 - y^2$
162. $y^2 - 1$
163. $9 - x^2$
164. $25 - 36x^4$
165. $4x^2 - 81y^6$
166. $a^{10} - 49b^{12}$

Tema 21: Trinomio cuadrado perfecto

- **Fórmula $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$.**

1. Factorizar $25x^2 - 40x + 16$.

   Extraemos la raíz cuadrada (positiva) del primer y tercer término, $\sqrt{25x^2} = 5x$, $\sqrt{16} = 4$. Como $2 \cdot 5x \cdot 4 = 40$ (término intermedio), entonces

$$25x^2 - 40x + 16 = (5x - 4)^2$$

2. Factorizar $25x^2 + 20xy + 4y^2$.

   Extraemos la raíz cuadrada (positiva) del primer y tercer término, $\sqrt{25x^2} = 5x$, $\sqrt{4y^2} = 2y$. Como $2 \cdot 5x \cdot 2y = 20xy$ (término intermedio), entonces

$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2$$

Ejercicios. Factorizar:

167. $x^2 + 2x + 1$
168. $9 - 6x + x^2$
169. $1 + 2a^3 + a^6$
170. $9y^2 - 30x^2y + 25x^4$
171. $\frac{x^2}{9} + 2xy + 9y^2$
172. $9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2$

Tema 22: Diferencia de cubos

- **Fórmula $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$.**

1. Factorizar $x^3 - 8$.

   Extraemos la raíz cúbica de ambos términos, $\sqrt[3]{x^3} = x$, $\sqrt[3]{8} = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

2. Factorizar $27y^3 + 64$.

   Extraemos la raíz cúbica de ambos términos, $\sqrt[3]{27y^3} = 3y$, $\sqrt[3]{64} = 4$. Entonces

$$\begin{aligned} 27y^3 + 64 &= (3y - 4)\left((3y)^2 - (3y)4 + 4^2\right) \\ &= (3y - 4)(9y^2 - 12y + 16) \end{aligned}$$

Ejercicios. Factorizar:

173. $x^3 + 8$
174. $64x^3 + y^3$
175. $125a^3 - 64b^3$
176. $x^6y^3 + 27z^3$
177. $(a - 3)^3 - 27b^3$
178. $(x + 2y)^3 - y^3$

Miscelanea. Factorizar:

179. $8x^2 + 4x$

180. $4u^2 - 9v^2$

181. $x^2 - 9x + 18$

182. $21x^2 - 10xy + y^2$

183. $125a^3 + 64b^3$

184. $y^4 - 16$

185. $a^5 - 3a^4 + a^3$

186. $x^3 + 3x^2 + x + 3$

187. $x^2 - 8xy + 16y^2 - 36a^2 + 12ab - b^2$

188. $28 - 16x - 21x^2 + 12x^3$

189. $36x^2 - 81y^2$

190. $27 - x^3$

191. $y^2 + 13y + 42$

192. $4a^2 - 12ab + 9b^2$

193. $x^8 - 1$

194. $a^4b^3 - a^3b^4 + a^2b^6$

195. $49t^8 - 25x^{10}$

196. $a^2 + ab + ac + bc$

197. $x^2 + 5x - 24$

198. $32a^2 + 12ab - 9b^2$

199. $x^9y^3 - 8z^6$

200. $6u^2v^3 + 3u^3v^4 - 9u^5v^6$

201. $a^2 + 4ab - 21b^2$

202. $y^2 - 10y + 25$

203. $-12xy^3z^2 - 28y^3z - 20x^2y^2z^2$

204. $10z^3 + 25z - 4z^2 - 10$

205. $9x^2 - 30xy + 25y^2$

206. $a^{2n+1} + a^{n+2} + a^{n+1}$

207. $169y^6 - 121t^8$

208. $25y^6 - 10y^3 + 1$

209. $9y^2 - 3y$

210. $x^4 + 2x^3 - 3x^2$

211. $(x + 2)^3 - 1$

212. $12x^2y^3 - 4x^3y^2$

213. $y^2 - 64$

214. $a^2 - 10a + 24$

215. $y^{3n} - y^{(2n+1)} + y^{2n}$

216. $20x^2 + 43xy + 14y^2$

217. $t^4 - 4t^2 - 32$

218. $x^{4n} - y^{6n}$

219. $x^2 + 6x + 9$

220. $x^2 - 49t^2$

221. $5t^2 - 7t - 6$

222. $8x^6 + 7x^3 - 1$

223. $4d^2 - 25k^2$

224. $6st^2 - 9s^2t - 2t^3 + 27s^3$

225. $4 - (3a + 2b)^2$

226. $x^6n - 14x^3n + 49$

227. $9x^2y^2 - 16w^6$

228. $9t^2 - 24t + 16 - 4r^2 + 4rs - s^2$

229. $9a^2 - 16b^2 - 3a - 4b$

230. $16x^2 + 8x + 1$

231. $10y^2 - 11y - 6$

232. $4t^3 + 4t^2 - t - 1$

233. $3xy - yz + 3xw - zw$

234. $(2x - 3)^2 - 16$

235. $(2x + y)^2 - (5z - 3w)^2$

236. $r^2 + 10rs + 25s^2 - 9$

237. $16x^2 - y^2 - 4x + y$

238. $a^6 + 2a^3 + 1$

239. $t^6 + 1 + t^2 + t^4$

240. $18u^2 + 9uv - 20v^2$

241. $x^{4n} - 4x^{2n} - 12$

242. $18x^2 - 57xy + 35y^2$

243. $64x^3 - y^3$

244. $ac + ad + 2bc + 2bd$

245. $4y^3 - y^2 + 4y - 1$

246. $81c^4 - d^4$

247. $t^6 - 1$

248. $y^8 - 5y^4 + 4$

249. $a^3 + 1 + a^2 + a$

Tema 23: Expresiones racionales I

Para reducir una expresión racional a su forma mínima se sustituye por una equivalente factorizando el denominador y numerador, y luego dividimos ambos entre los factores comunes. El procedimiento se justifica porque

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}, \qquad \text{Si } k \neq 0$$

Ejemplo

Reducir al mínimo la expresión $\dfrac{18x^2 + 9xy - 2y^2}{9x^2 - 4y^2}$

Solución:

$$\frac{18x^2 + 9xy - 2y^2}{9x^2 - 4y^2} = \frac{(6x - y)(3x + 2y)}{(3x - 2y)(3x + 2y)} = \frac{6x - y}{3x - 2y}$$

Ejercicios. Reducir a su minina expresión cada uno de las siguientes fracciones

250. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$

251. $\dfrac{t^2 - 3t - 28}{t^2 - 4t - 21}$

252. $\dfrac{y^2 - 4y + 4}{y^2 - 4}$

253. $\dfrac{6x^2 + 17x + 7}{12x^2 + 13x - 35}$

254. $\dfrac{x^3 - 64}{4 - x}$

255. $\dfrac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 3x - 4}$

256. $\dfrac{5 - a}{a^2 - 25}$

257. $\dfrac{3y^2 - 6xy + 4x^2y - 8x^3}{8x^3 - y^3}$

Tema 24: Expresiones racionales II

Para multiplicar y dividir expresiones racionales, se utilizan las siguientes propiedades

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo

Reducir al mínimo cada una de las siguientes expresiones

1. $\dfrac{x - 5}{4x^2 - 9} \cdot \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - 11x + 5}$

2. $\dfrac{4x^2 - 9y^2}{xy + y^2} \div \dfrac{6x^2 - xy - 12y^2}{xy + y^2}$

solución

1. $\dfrac{x - 5}{4x^2 - 9} \cdot \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - 11x + 5} = \dfrac{x - 5}{(2x - 3)(2x + 3)} \cdot \dfrac{(2x + 3)(2x + 3)}{(2x - 1)(x - 5)}$

$$= \frac{(x - 5)(2x + 3)(2x + 3)}{(2x - 3)(2x + 3)(2x - 1)(x - 5)} = \frac{2x + 3}{(2x - 1)(2x - 3)}$$

2. $\dfrac{4x^2 - 9y^2}{xy + y^2} \div \dfrac{6x^2 - xy - 12y^2}{xy + y^2} = \dfrac{(2x - 3y)(2x + 3y)}{y(x + y)} \cdot \dfrac{y(x + y)}{(2x - 3y)(3x + 4y)}$

$$= \frac{y(2x - 3y)(2x + 3y)(y + x)}{y(x + y)(2x - 3y)(3x + 4y)} = \frac{(2x + 3y)}{(3x + 4y)}$$

Ejercicios. Reducir a su mínima expresión cada uno de las siguientes operaciones

258. $\dfrac{x-y}{x+3y}\cdot\dfrac{x^2-9y^2}{x^2-y^2}$

259. $\dfrac{x^2-y^2}{xy-2y^2}\div\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2x^2-4xy}$

260. $\dfrac{t^2-2t-15}{t^2-9}\cdot\dfrac{t^2-6t+9}{12-4t}$

261. $\dfrac{x^6-7x^3-8}{4x^2-4x-8}\div(2x^2+4x+8)$

Tema 25: Expresiones racionales III

La suma de expresiones racionales se determinan siguiendo las propiedades siguientes

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Ejemplo

Reducir al mínimo cada una de las siguientes expresiones

1. $\dfrac{3t}{2t-5}-\dfrac{5}{2t+5}$

2. $\dfrac{5}{x^2+x-6}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$

Solución

1. $$\frac{3t}{2t-5}-\frac{5}{2t+5}=\frac{3t(2t+5)}{(2t-5)(2t+5)}-\frac{5(2t-5)}{(2t+5)(2t-5)}=\frac{3t(2t+5)-5(2t-5)}{(2t-5)(2t+5)}$$
$$=\frac{6t^2+15t-10t+25}{4t^2-25}=\frac{6t^2+5t+25}{4t^2-25}$$

2. $$\frac{5}{x^2+x-6}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\frac{5}{(x+3)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{5(x-1)}{(x+3)(x-2)(x-1)}+\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+3)(x+3)}+\frac{(2x+2)(x-2)}{(x+3)(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{5(x-1)+(x+3)+(2x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)(x-1)}=\frac{5x-5+x+3+2x^2-2x-4}{(x+3)(x-2)(x-1)}$$
$$=\frac{2x^2+4x-6}{(x+3)(x-2)(x-1)}=\frac{2(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)(x-1)}=\frac{2}{x-2}$$

Ejercicios. Reducir a su mínima expresión cada uno de las siguientes operaciones

262. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}$

263. $\dfrac{x^2+3x+1}{x}-\dfrac{1}{x}$

264. $\dfrac{x}{x-10}-\dfrac{2}{x^2-100}$

265. $\dfrac{2t+1}{3t-3}+\dfrac{6-t}{t^2-5t+4}$

266. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

267. $\dfrac{t}{1+\frac{t-1}{t+1}}$

Miscelanea. Reducir a su mínima expresión cada uno de las siguientes expresiones

268. $\dfrac{y-3}{y^2-9}$

269. $\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$

270. $\dfrac{2x+10}{x^2+7x+10}$

271. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

272. $\dfrac{x^2-8x}{x^2-6x-16}$

273. $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

274. $\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$

275. $\dfrac{x^3-1}{x^2+3x-4}$

276. $\dfrac{x^5+2x^4+x^3}{x^4-2x^2+1}$

277. $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3+x+1}$

278. $\dfrac{x^4-5x^3+4x-20}{x^4-5x^3+x-5}$

279. $\dfrac{x^2-x-12}{5x-5}\cdot\dfrac{3x-3}{x^2-9}$

280. $\dfrac{6c-9}{c^2-25}\cdot\dfrac{c^2-3c-10}{12-4c}$

281. $\dfrac{x^2-3xy-4y^2}{x^2-xy-2y^2}\cdot\dfrac{x^2-xy-6y^2}{x^2-xy-12y^2}$

282. $\dfrac{x-y}{x+3y}\cdot\dfrac{x^2-9y^2}{x^2-y^2}$

284. $\dfrac{1}{x}\quad\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{x+9}$

285. $\dfrac{\dfrac{1}{(2+h)^2}-\dfrac{1}{4}}{h}$

286. $\dfrac{1}{t-1}\quad\dfrac{1}{(t+3)^2}-\dfrac{1}{16}$

287. $\dfrac{1}{2}\quad\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

288. $-\dfrac{x^2+1}{2}\quad\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}$

289. $\dfrac{a-1}{2a^2-18}+\dfrac{a+2}{9a-3a^2}$

290. $\dfrac{2x+4}{x^2-8x+15}-\dfrac{x-5}{x^2-x-6}-\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

291. $\dfrac{2x+5}{x^2+8x+16}+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{x-2}{x^2+4x}$

292. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}-1}{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{2x}{y}+1}$

293. $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

294. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}$

$\dfrac{1}{}\qquad\dfrac{1}{}$

283. $\dfrac{4a^2 - 3ab - b^2}{16a^2b^2 - b^4} \cdot \dfrac{b^2 - 4ab}{b - a}$

295. $\dfrac{3x + 3h + 2 - 3x + 2}{h}$

Tema 26: Exponentes

1. $x^0 = 1$
2. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
3. $(x^n)^m = x^{nm}$
4. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
5. $(x \cdot y)^n = x^n y^n$
6. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^m}$
7. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$
8. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
9. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$
10. $x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$
11. $x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} = (\sqrt[m]{x})^n$
12. $(\sqrt[m]{x})^m = x$
13. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$
14. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Ejemplos

1. Los números sobre el signo = indican la propiedades utilizadas

- $(x^3)(x^5) \overset{2}{=} x^8$
- $\sqrt[5]{x^3}\,(x^{2/5}) \overset{10}{=} x^{3/5}\,x^{2/5} \overset{2}{=} x$
- $\dfrac{x^3}{x^7} \overset{4}{=} x^{-4} \overset{8}{=} \dfrac{1}{x^4}$
- $(x^7)(x^{-2})x \overset{2}{=} x^6$
- $\dfrac{x^5}{x^2} \overset{4}{=} x^3$
- $(32x^5)^{2/5} \overset{5}{=} (32)^{2/5}(x^5)^{2/5} \overset{11}{=} (32)^{2/5}(x^5)^{2/5}$

2. Elimine los exponentes negativos en $\dfrac{x^{-3}y^2}{z^{-2}}$

Solución

$$\frac{3x^{-2}y^2}{z^{-3}} = \frac{3y^2z^3}{x^2}$$

3. Simplifique las siguientes expresiones. Evite exponentes negativos.

(a). $\left(x^3y^2\right)^3$ (b). $\left(\dfrac{x^2y^3}{z^3}\right)^4$ (c). $\left(\dfrac{x^{-3}y^4z^{-5}}{x^6y^{-2}z^{-4}}\right)^{-2}$.

Solución

(a). $\left(x^3y^2\right)^3 = \left(x^3\right)^3\left(y^2\right)^3 = x^9y^6$

(b). $\left(\dfrac{x^2y^3}{z^5}\right)^4 = \dfrac{\left(x^2y^3\right)^4}{(z^5)^4} = \dfrac{x^8y^{12}}{z^{20}}$

(c). $\left(\dfrac{x^{-3}y^4z^{-5}}{x^6y^{-2}z^{-4}}\right)^{-2} = \left(\dfrac{x^6y^{-2}z^{-4}}{x^{-3}y^4z^{-5}}\right)^2 = \left(x^9y^{-6}z\right)^2 = x^{18}y^{-12}z^2 = \dfrac{x^{18}z^2}{y^{12}}$.

Ejercicios. Simplifique las siguientes expresiones. Evite exponentes negativos.

296. $(2^3)(2^4)$

297. $(x^7)(x^2)$

298. $x^3 x x^4$

299. $a^7 a^{-5}$

300. $\dfrac{x^6}{x^2}$

301. $\sqrt[3]{x}\,x^4$

302. $\sqrt{y}\,y^5$

303. $\sqrt[3]{(x^2+3)^2}\,(x^2+3)^2$

304. $y^{1/2}y^{2/3}$

305. $(x^{-2})^{-3}$

306. $(xy)^3$

307. $\frac{y^3}{y^5}$

308. $(2x^3y^2)^5$

309. $\frac{(5x^2)^3}{(2x)^2}$

310. $\frac{(x+1)^3(x+1)^4}{(x+1)^2}$

311. $\left(\frac{x^2y^3}{z^2}\right)^2$

312. $\frac{(x^5y^3)^3}{(x^4y^5)^3}$

313. $(3x^{-2}y^2)^3(x^2y)^5$

314. $\frac{(x^5y^3)^3x^3y^4}{(x^4y^5)^3xy^5}$

315. $\left(\frac{27x^6}{y^9}\right)^{2/3}$

316. $(5x^2y^3z^4)^3(2xy^2z^2)^3$

Ejercicios. Simplifique.

317. $\sqrt[3]{x^5}$

318. $\sqrt[3]{(x^2+3)^2(x^2+3)^2}$

319. $\sqrt{16x^6}$

320. $\sqrt[3]{-27x^{10}y^8}$

321. $\sqrt[4]{16x^{16}y^4z^9}$

322. $\sqrt[4]{\frac{10}{3a^3b^5}}\sqrt[4]{24a^2b^3}$

323. $\sqrt[3]{9xy^2}\sqrt[3]{6x^2y^4}\sqrt[3]{60x^5y}$

324. $\sqrt{2uv}\sqrt{6uw}\sqrt{12vw}$

325. $\sqrt[4]{\frac{10}{3a^3b^5}}$

326. $\sqrt[3]{\frac{27y^2}{64x^6}}$

327. $\sqrt[4]{\frac{15x^7}{8y^3z^6}}$

328. $\sqrt[4]{\frac{270x^yz^3}{288x^5y^6z^2}}$

Tema 27: Racionalización

Para racionalizar un numerador o denominador en una fracción, utilizamos formulas como, por ejemplo,

$$\sqrt[m]{x^m}=x \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplos

En la parte (a) racionalice el denominador y en la parte (b) el numerador

(a). $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (b). $\frac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$

Solución

(a). $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(b). $\frac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{(x+\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}^2-3^2\sqrt{y}^2}{(x+\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}=\frac{x-9y}{(x+\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}$

Ejercicios. Racionalice el numerador

329. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

330. $\frac{\sqrt{u}-2}{u-4}$

331. $\frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}$

332. $\sqrt{5}$

333. $\frac{\sqrt{3(x+h)-2}-\sqrt{3x-2}}{h}$

334. $\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

Sug. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$