UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - PRIMER PERÍODO- GRADO 10°

Martha Juliet Valencia Villa- Erika Johana Arboleda Tamayo

TEMAS: Números reales, operaciones

Razones trigonométricas: Medidas angular, longitud de arco circular, área del sector circular, Trigonometría de ángulos rectos, aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

OBJETIVOS

- ✓ Aplica las propiedades de los números reales para resolver diferentes situaciones.
- ✓ Determina la medida de ángulos en radianes, grados.
- ✓ Encuentra el área del sector circular.
- ✓ Aplica la definición de longitud de arco circular a diferentes problemas.
- ✓ Interpreta la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

REQUISITOS PREVIOS:

- ✓ Representación de los números reales.
- ✓ Resolver las operaciones básicas entre los números reales.
- ✓ Reconoce los diferentes triángulos.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
✓ Números reales, operaciones y propiedades. ✓ Medida angular: ángulos coterminales, longitud de un arco circular ✓ Área de un sector circular. ✓ Trigonometría de ángulos rectos. ✓ Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos. ✓ Estadística descriptiva e inferencial. Población y muestra. ✓ Variables cualitativas. Distribución de frecuencias.	✓ Participa del trabajo individual y en familia de una manera comprometida y responsable. ✓ Utiliza las herramientas tecnológicas como fuente de información, para complementar los conocimientos. ✓ Resuelve situaciones problema aplicando los conceptos vistos. ✓ Consigna los contenidos de la unidad didáctica de manera coherente y cohesiva.	✓ Demuestra interés por aprender. ✓ Desarrolla y practica las actividades propuestas en la unidad didáctica. ✓ Propone estrategias para la construcción y apropiación del conocimiento. ✓ Presenta sus trabajos en forma oportuna y responsable. ✓ Asume una actitud de confianza frente a las propias capacidades para la comprensión de la unidad didáctica.

✓ Variables cuantitativas discretas. Distribución de frecuencias. ✓ Variables cuantitativas continuas. Distribución de frecuencias.	✓ Plantea estrategias para mejorar los procesos fundamentales. ✓ Desarrolla las actividades propuestas en la unidad didáctica y supera sus insuficiencias cognitivas. ✓ Leer cuidadosamente la unidad didáctica.	

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

- ✓ Explicación de los conceptos con dos o tres ejemplos, videos para retroalimentar los conocimientos de los estudiantes y se desarrollarán una serie de ejercicios aplicando dicha teoría.
- ✓ Estudiar los ejercicios propuestos, ver los videos.
  El contenido y ejercicios es del texto: Precálculo James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson

file:///C:/Users/Martha/Downloads/Libro.Pre_Calculo_-_James_Stewar%20(5).pdf

Libro matemáticas del ministerio de educación.

https://drive.google.com/open?id=1qzGk5kADhH31wH-wrFZ-x9jkjBHnICeK&authuser=0

Números reales

Realizar un informe de lectura del siguiente texto

ASPECTO HISTÓRICO

El sistema de números reales tiene una historia que se remonta al menos a la antigua Babilonia (1800 a.C.). Es asombroso cuántas de las actitudes de la antigua Babilonia se parecen a las nuestras. Como se estableció la dificultad fundamental con los números irracionales es que no se pueden escribir como cocientes o enteros, o de manera equivalente, como decimales que se repiten o terminan. En Babilonia escribían los números en un sistema basado en 60, de la misma manera que escribimos los nuestros basados en 10. Escribirían tantos lugares decimales para π como lo demandara la exactitud del problema, igual que ahora se usa

$$\pi \approx 3\frac{1}{7} \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.1416 \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.14159$$

$$\text{o} \quad \pi \approx 3.14159265358979$$

dependiendo de cuánta exactitud se necesite.

Las cosas eran muy distintas para los griegos, cuyo sistema numérico permitía sólo números racionales. Cuando se descubrió que $\sqrt{2}$ no era un número racional, esto se vio como una falla fundamental en el concepto de número. El asunto era tan serio que se dice que la Hermandad Pitagórica (una sociedad matemática de la época) ahogó a uno de sus miembros por revelar tan terrible secreto. Los matemáticos griegos después se alejaron del concepto de número expresando hechos acerca de los números enteros en términos de segmentos.

Sin embargo, en astronomía, los métodos de Babilonia, incluyendo su sistema numérico, continuaron utilizándose. Simon Stevin (1548-1620), tal vez usando el sistema de Babilonia como modelo inventó el sistema decimal, en 1585, completo con reglas de cálculo. [Otros, como al-Kashi de Samarkanda (1429) habían hecho algunos avances en la misma dirección]. El sistema decimal oculta de manera tan efectiva las dificultades, que la necesidad de mayor precisión lógica comenzó a sentirse hasta principios de 1800. Alrededor de 1880, Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) proporcionaron definiciones precisas de los números reales. La definición de Cantor, aunque más abstracta y precisa, tiene sus raíces en el sistema numérico decimal (y por ende en el de Babilonia).

Los conjuntos y la teoría de conjuntos fueron el beneficio indirecto de la investigación que llegó a aclarar los fundamentos de los sistemas de números reales. La teoría de conjuntos se ha convertido en una disciplina amplia en sí misma y muchos matemáticos la ven como el fundamento de las matemáticas modernas. Los descubrimientos de Cantor de que los conjuntos infinitos también se pueden contar y tienen tamaños diferentes se encuentran entre los resultados más sorprendentes de las matemáticas modernas.

Problemas históricos

El sistema numérico de Babilonia se basaba en 60. Entonces 2,30 significa $2 + \frac{30}{60} = 2.5$ y 4,25,14 significa

$$4 + \frac{25}{60} + \frac{14}{60^2} = 4 + \frac{1514}{3600} = 4.42055555\ldots$$

1. ¿Cuáles son los siguientes números en la notación de Babilonia?
   a) $1\frac{1}{3}$ b) $2\frac{5}{6}$
2. ¿Cuáles son los siguientes números de Babilonia cuando se escriben como fracciones y como decimales?
   a) 2,20 b) 4,52,30 c) 3,8,29,44

Números racionales

Se define como el cociente de dos números enteros con denominador diferente de cero

Ejemplo

1. Como escribir un numero decimal en fracción. Copiar el video en el cuaderno

https://www.youtube.com/watch?v=F5TT9lzXJW8

2. Convertir decimal periódico puro a fracción
   https://www.youtube.com/watch?v=rO4bBIRmOLc

3. Convertir decimal periódico mixto a fracción
   https://www.youtube.com/watch?v=59vzMf9QefM

   https://www.youtube.com/watch?v=IJm0Kk2vjyI

“Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables”. Eduardo Sáenz de Cabezón **https://www.youtube.com/watch?v=BbA5dpS4CcI&t=1130s**

Números irracionales

El conjunto de los números irracionales esta conformado por los números que no se pueden escribir en forma de fracción a/b, donde a y b son números enteros y b diferente de cero. La expresión de un número irracional es infinita no periódica.

Ver cada Video y copiar en el cuaderno

1. Números irracionales | Introducción https://www.youtube.com/watch?v=rTUwSF0prgs&list=PLeySRPnY35dGIcw3F2MbVCNHwUl4rw6in

2. Ubicación en la recta numérica de los números Irracionales https://www.youtube.com/watch?v=e9E0XpWkFL8&list=PLeySRPnY35dGIcw3F2MbVCNHwUl4rw6in&index=2

3. Simplificación de números irracionales https://www.youtube.com/watch?v=OC3Usv_Et_M&list=PLeySRPnY35dGIcw3F2MbVCNHwUl4rw6in&index=3

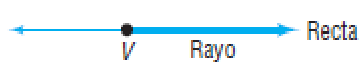
   https://www.youtube.com/watch?v=OqXYbfF29Lw&list=PLeySRPnY35dGIcw3F2MbVCNHwUl4rw6in&index=4

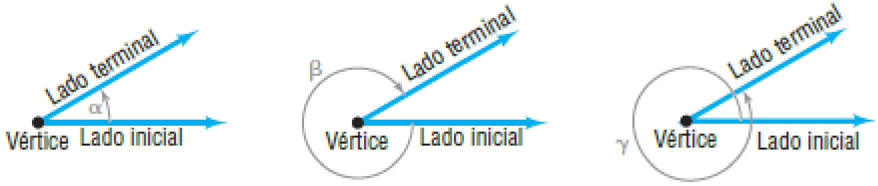
Razones trigonométricas

Ángulos y sus medidas

Un **rayo**, o **semirrecta**, es esa porción de una recta que comienza en el punto V sobre la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo se llama su **vértice**. Vea la figura 1.

Figura 1





Rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj
Ángulo positivo
a)

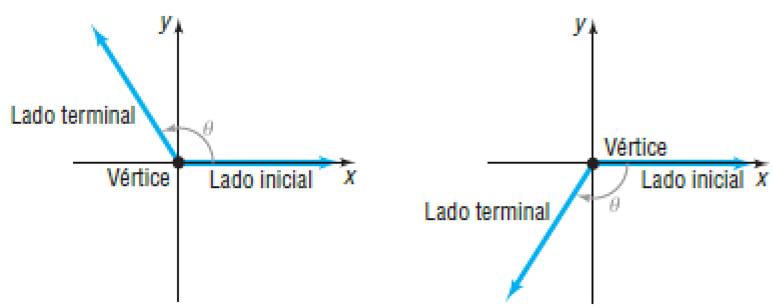
Rotación en sentido de las manecillas del reloj
Ángulo negativo
b)

Rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj
Ángulo positivo
c)

Sise dibujan dos rayos con un vértice común, forman un ángulo. En la figura anterior están los diferentes ángulos y sus signos según la rotación.

Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x. Vea la figura 3.

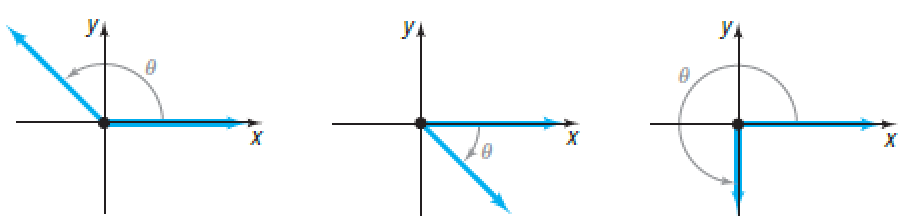
Figura 3



a) θ está en posición estándar
θ es positivo

b) θ está en posición estándar
θ es negativo

Según donde termina el ángulo en posición estándar, se determina en que cuadrante esta.



a) θ está en el cuadrante II **b)** θ está en el cuadrante IV **c)** θ es un ángulo cuadrantal

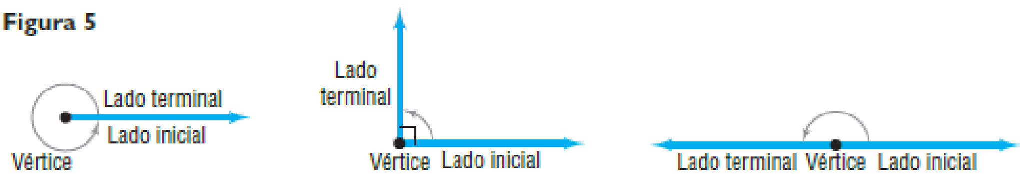
Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado terminal. Las dos medidas de uso común son *grados* y *radianes*.

Sistema sexagesimal

Grados

El ángulo formado al girar el lado inicial exactamente una vez en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta que coincide consigo mismo (1 vuelta), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. **Un grado, 1°**, es $\frac{1}{360}$ de vuelta. Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta; un **ángulo plano** mide 180°, o $\frac{1}{2}$ vuelta. Vea la figura 5. Como se muestra en la figura 5b), es costumbre indicar un ángulo recto mediante el símbolo ⌞.

Figura 5



a) 1 vuelta en sentido positivo, 360°
b) ángulo recto, $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido positivo, 90°
c) ángulo plano, $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido positivo, 180°

EJEMPLO 1 **Dibujo de un ángulo**

Dibuje cada ángulo

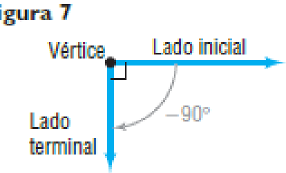
a) 45° b) −90° c) 225° d) 405°

Solución a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ ángulo recto. Vea la figura 6.

b) Un ángulo de −90° es $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido negativo (como las manecillas). Vea la figura 7.

Figura 6

Figura 7



c) Un ángulo de 225° consiste en una rotación de 180° seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 8.

d) Un ángulo de 405° consiste en 1 vuelta (360°) seguida de una rotación de 45°. Vea la figura 9.

Figura 8

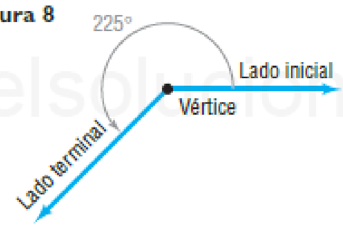
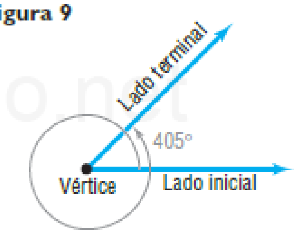


Figura 9



EJEMPLO 2 Conversión manual entre grados, minutos y segundos, y las formas decimales

a) Convierta $50°6'21''$ en un decimal en grados.

b) Convierta $21.256°$ en la forma $G°M'S''$.

Solución a) Dado que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, se convierte como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= 50° + 6' + 21'' \\ &= 50° + 6\cdot\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 21\cdot\left(\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\right)^{\circ} \\ &\approx 50° + 0.1° + 0.005833° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

b) Se procede como sigue:

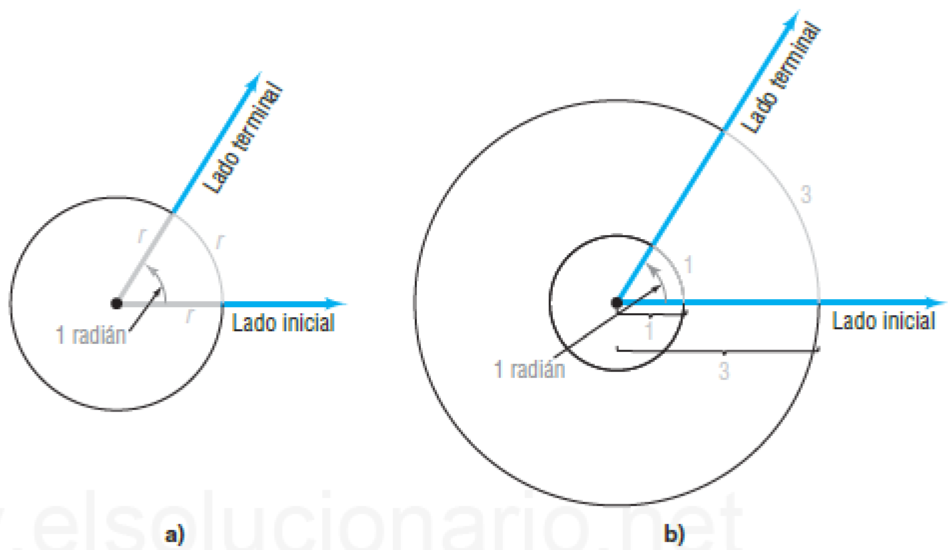
$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° \\ &= 21° + (0.256)(60') && \text{Convertir fracciones de grados en minutos, } 1° = 60' \\ &= 21° + 15.36' \\ &= 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + (0.36)(60'') && \text{Convertir fracciones de minutos en segundos, } 1' = 60'' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \\ &\approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

Radianes

Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (abarcan) un arco sobre el círculo. Si el radio del círculo es r y la longitud del arco subtendido por el ángulo central también es r, entonces la medida del ángulo es **1 radián**. Vea la figura 10*a*).

Para un círculo de radio 1, los rayos del ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 1. Para un círculo de 3, los rayos de un ángulo central que mide 1 radián subtienden un arco de longitud 3. Vea la figura 10*b*).

Figura 10



Longitud de arco

Teorema **Longitud de arco**

Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = r\theta \qquad (4)$$

EJEMPLO 3 **Longitud del arco de un círculo**

Encuentre la longitud del arco de un círculo de radio 2 metros que subtiende un ángulo central de 0.25 radianes.

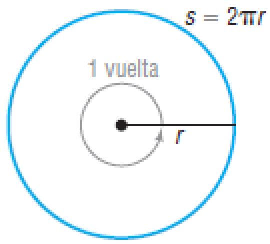
Solución Se usa la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$

Relación entre grados y radianes

Figura 12

1 vuelta $= 2\pi$ radianes



Una vuelta 2 pi radianes y también una vuelta son 360°

$$s = r\theta$$
$$2\pi r = r\theta$$
$$\theta = 2\pi \text{ radianes}$$

1 vuelta $= 2\pi$ radianes

$360° = 2\pi$ radianes

$180° = \pi$ radianes

EJEMPLO 4 **Conversión de grados a radianes**

Convierta cada ángulo de grados a radianes.

a) 60° b) 150° c) −45° d) 90° e) 107°

Solución

a) $60° = 60 \cdot 1 \text{ grado} = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{radián} = \dfrac{\pi}{3} \text{radianes}$

b) $150° = 150 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{radián} = \dfrac{5\pi}{6} \text{radianes}$

c) $-45° = -45 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{radián} = -\dfrac{\pi}{4} \text{radián}$

d) $90° = 90 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{radián} = \dfrac{\pi}{2} \text{radianes}$

e) $107° = 107 \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{radián} \approx 1.868 \text{ radianes}$

EJEMPLO 5 Conversión de radianes a grados

Convierta cada ángulo de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{6}$ radián b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes

d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes e) 3 radianes

Solución a) $\frac{\pi}{6}\text{radián} = \frac{\pi}{6}\cdot 1\text{ radián} = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{180}{\pi}\text{grados} = 30°$

b) $\frac{3\pi}{2}\text{radianes} = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{180}{\pi}\text{grados} = 270°$

c) $-\frac{3\pi}{4}\text{radianes} = -\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{180}{\pi}\text{grados} = -135°$

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Grados		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

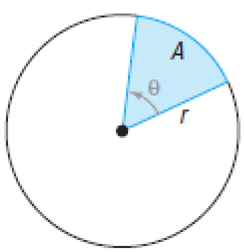
Área del sector circular

Teorema

Área de un sector

El área del sector de un círculo de radio r formada por un ángulo central del θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad (8)$$



EJEMPLO 7 Área de un sector de un círculo

Encuentre el área del sector de un círculo de radio 2 pies formado por un ángulo de 30°. Redondee la respuesta a dos decimales.

Solución Se usa la ecuación (8) con $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ radianes. [Recuerde, en la ecuación (8), θ debe estar en radianes]. El área A del sector es de

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(2)^2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{pies cuadrados} \approx 1.05 \text{ pies cuadrados}$$

redondeado a dos decimales.

Ejercicios

En los problemas 11-22, dibuje cada ángulo.

11. 30° **12.** 60° **13.** 135° **14.** −120° **15.** 450° **16.** 540°

17. $\frac{3\pi}{4}$ **18.** $\frac{4\pi}{3}$ **19.** $-\frac{\pi}{6}$ **20.** $-\frac{2\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$ **22.** $\frac{21\pi}{4}$

En los problemas 23-28, convierta cada ángulo a un decimal en grados. Redondee su respuesta a dos decimales.

23. 40°10′25″ **24.** 61°42′21″ **25.** 1°2′3″ **26.** 73°40′40″ **27.** 9°9′9″ **28.** 98°22′45″

En los problemas 29-34, dé cada ángulo en la forma G°M′S″. Redondee su respuesta al segundo más cercano.

29. 40.32° **30.** 61.24° **31.** 18.255° **32.** 29.411° **33.** 19.99° **34.** 44.01°

En los problemas 35-46, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

35. 30° **36.** 120° **37.** 240° **38.** 330° **39.** −60° **40.** −30°

41. 180° **42.** 270° **43.** −135° **44.** −225° **45.** −90° **46.** −180°

En los problemas 47-58, convierta cada ángulo de radianes a grados.

47. $\frac{\pi}{3}$ **48.** $\frac{5\pi}{6}$ **49.** $-\frac{5\pi}{4}$ **50.** $-\frac{2\pi}{3}$ **51.** $\frac{\pi}{2}$ **52.** 4π

53. $\frac{\pi}{12}$ **54.** $\frac{5\pi}{12}$ **55.** $-\frac{\pi}{2}$ **56.** $-\pi$ **57.** $-\frac{\pi}{6}$ **58.** $-\frac{3\pi}{4}$

En los problemas 59-64, convierta cada ángulo de grados a radianes. Exprese su respuesta en la forma decimal, redondeada a dos decimales.

59. 17° **60.** 73° **61.** −40° **62.** −51° **63.** 125° **64.** 350°

En los problemas 65-70, convierta cada ángulo de radianes a grados. Exprese su respuesta en la forma decimal redondeada a dos decimales.

65. 3.14 **66.** 0.75 **67.** 2 **68.** 3 **69.** 6.32 **70.** $\sqrt{2}$

En los problemas 71-78, s denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

71. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $s = ?$

72. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $s = ?$

73. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $s = 2$ pies, $r = ?$

74. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $s = 6$ centímetros, $r = ?$

75. $r = 5$ millas, $s = 3$ millas, $\theta = ?$

76. $r = 6$ metros, $s = 8$ metros, $\theta = ?$

77. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $s = ?$

78. 3 metros, $\theta = 120°$, $s = ?$

En los problemas 79-86, A denota el área del sector de un círculo de radio r formado por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que falta. Redondee sus respuestas a tres decimales.

79. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $A = ?$

80. $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $A = ?$

81. $\theta = \frac{1}{3}$ radianes, $A = 2$ pies cuadrados, $r = ?$

82. $\theta = \frac{1}{4}$ radianes, $A = 6$ centímetros cuadrados, $r = ?$

83. $r = 5$ millas, $A = 3$ millas cuadradas, $\theta = ?$

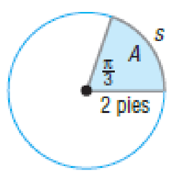
84. $r = 6$ metros, $A = 8$ metros cuadrados, $\theta = ?$

85. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $A = ?$

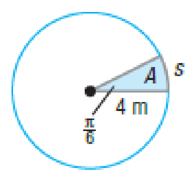
86. $r = 3$ metros, $\theta = 120°$, $A = ?$

En los problemas 87-90, encuentre la longitud s y el área A. Redondee las respuestas a tres decimales.

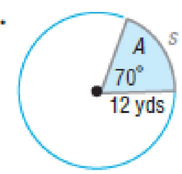
87.



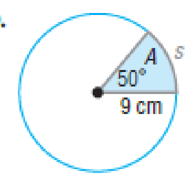
88.



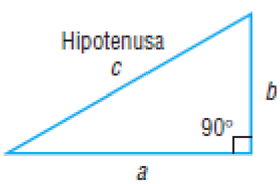
89.



90.

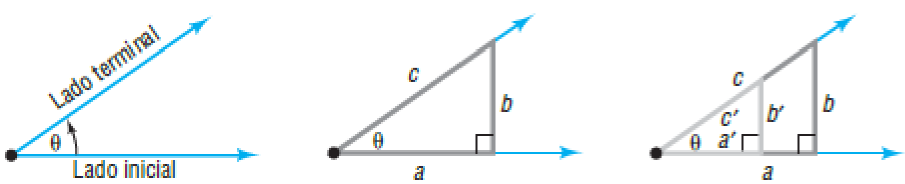


Trigonometría del triángulo rectángulo



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b}$$

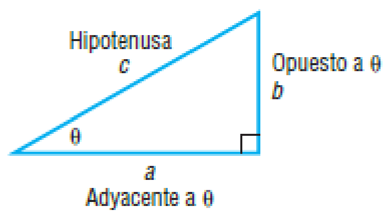


a) Ángulo agudo **b)** Triángulo rectángulo **c)** Triángulos similares

Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra a θ: seno de θ, coseno de θ, tangente de θ, cosecante de θ, secante de θ y cotangente de θ.

Las seis razones de un triángulo rectángulo se llaman **funciones trigonométricas de ángulos agudos** y se definen como sigue:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
seno de θ	sen θ	$\frac{b}{c}$
coseno de θ	cos θ	$\frac{a}{c}$
tangente de θ	tan θ	$\frac{b}{a}$
cosecante de θ	csc θ	$\frac{c}{b}$
secante de θ	sec θ	$\frac{c}{a}$
cotangente de θ	cot θ	$\frac{a}{b}$



donde El ángulo es el mostrado en la figura.

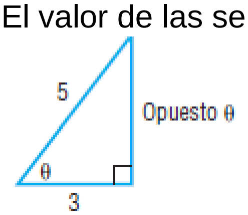
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

Como a, b y c son positivos, cada una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ es positiva.

Ejemplo.

El valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ de la figura es.



Primero encontramos el lado opuesto al ángulo, con el teorema de Pitágoras

c = 5, hipotenusa

b= 3, cateto adyacente al ángulo θ. Encontramos el lado a, opuesto al ángulo θ.

$$(\text{adyacente})^2 + (\text{opuesto})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$
$$3^2 + (\text{opuesto})^2 = 5^2$$
$$(\text{opuesto})^2 = 25 - 9 = 16$$
$$\text{opuesto} = 4$$

(1) para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{3}{4}$$

Identidades fundamentales

2 Tal vez observó algunas relaciones existentes entre las seis funciones trigonométricas de ángulos agudos. Por ejemplo, las **identidades recíprocas** son

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \textbf{(2)}$$

Otras dos identidades fundamentales que es fácil comprender son las **identidades de cociente**.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 2 **Valores de las funciones trigonométricas restantes, dados sen θ y cos θ**

Dados $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, encuentre el valor de las funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Con base en la fórmula (3), se tiene

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

Triángulos

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Identidades fundamentales

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

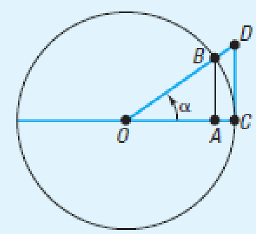
Aspecto histórico

El nombre *seno* para la función seno se debe a una confusión medieval. Viene de la palabra en sánscrito *jīva* (que significa *cuerda*); fue usado primero en India por Araybhata el Mayor (510 dC). Él realmente quiso decir media cuerda, pero lo abrevió. Esto incluyó en el árabe la palabra *jība* que no tenía significado. Debido a que la palabra árabe *jaib* se escribe de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), *jiba* se pronunciaba como *jaib*, que quiere decir pecho o *seno*; hasta la fecha, *jaib* es la palabra árabe para *seno*. Los académicos que traducían los trabajos del árabe al latín encontraron que la palabra *sinus* también quería decir pecho o *seno*; para *sinus*, nosotros tenemos la palabra *seno*.

El nombre tangente, debido a Thomas Finck (1583), se entiende al observar la figura 26. El segmento de recta $\overline{DC}$ es tangente al círculo en C. Si $d(O, B) = d(O, C) = 1$, entonces la longitud del segmento $\overline{DC}$ es

$$d(D, C) = \frac{d(D, C)}{1} = \frac{d(D, C)}{d(O, C)} = \tan\alpha$$

Figura 26

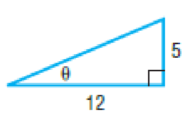


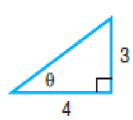
El nombre antiguo para la tangente es *umbra versa* (que significa sombra volteada); se refiere al uso de la tangente en la solución de problemas de altura con sombras.

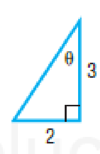
Los nombres de las cofunciones surgieron como sigue. Si α y β son ángulos complementarios, entonces $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$. Como β es complemento de α, era natural escribir el coseno de α como *sen co* α. Tal vez por razones de facilidad de pronunciación, *co* migró al frente y después se dio una abreviatura de tres letras al coseno para uniformarlo con sen, sec y tan. Las otras dos cofunciones tuvieron un trato similar, excepto que las formas largas de *cotan* y *cosec* sobreviven hasta hoy en algunos países.

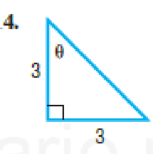
Ejercicios

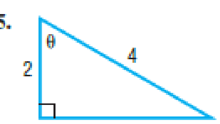
En los problemas 11-20, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura.

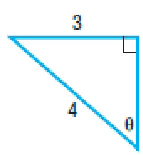
11.


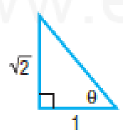
12.


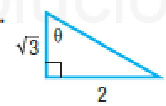
13.


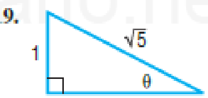
14.


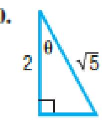
15.


16.


17.


18.


19.


20.


En los problemas 21-24, use las identidades para encontrar el valor exacto de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

21. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

22. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$

23. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

24. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}, \quad \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Razones trigonométricas de ángulos notables

θ (Radianes)	θ (Grados)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplos

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $\operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ$ b) $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ c) $\tan^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}$

Solución

a) $\operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

b) $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

Ejercicios

En los problemas 17-28, encuentre el valor exacto de cada expresión. No use calculadora.

17. $4\cos 45^\circ - 2\operatorname{sen} 45^\circ$

18. $2\operatorname{sen} 45^\circ + 4\cos 30^\circ$

19. $6\tan 45^\circ - 8\cos 60^\circ$

20. $\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

21. $\sec\frac{\pi}{4} + 2\csc\frac{\pi}{3}$

22. $\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}$

23. $\sec^2\frac{\pi}{6} - 4$

24. $4 + \tan^2\frac{\pi}{3}$

25. $\operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$

26. $\sec^2 60^\circ - \tan^2 45^\circ$

27. $1 - \cos^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ$

28. $1 + \tan^2 30^\circ - \csc^2 45^\circ$

Problemas de aplicación de triángulos rectángulos

ángulos.

Ejemplo 4 Resolver un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo ABC, mostrado en la figura 7.

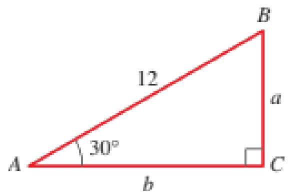


Figura 7

Solución Es claro que $\angle B = 60°$. Para encontrar a, se busca una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos ya conocidos. En este caso, se tiene sen $30° = a/12$, por lo tanto

$$a = 12 \operatorname{sen} 30° = 12\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

De manera similar, $\cos 30° = b/12$, por lo tanto

$$b = 12 \cos 30° = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

Es muy útil saber que, usando la información dada en la figura 8, las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son

$$a = r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

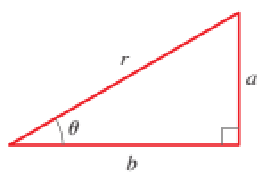


Figura 8
$a = r \operatorname{sen} \theta$
$b = r \cos \theta$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos por medio de relaciones trigonométricas es fundamental en muchos problemas de navegación, levantamiento de planos, astronomía y la medición de distancias. Las aplicaciones consideradas en esta sección siempre tienen que ver con triángulos rectángulos pero, como se verá en las tres secciones siguientes, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son triángulos rectángulos.

Para el análisis de los ejemplos siguientes se requiere cierta terminología. Si un observador está mirando un objeto, entonces la línea del ojo del observador al objeto se llama **línea de visión** (figura 9). Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación.** Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y depresión se dan para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, como un plano inclinado o una ladera, se usa el término **ángulo de inclinación**.

Tales de Mileto (alrededor de 625-547 a.C.) es el fundador legendario de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna. Por medio de propiedades de triángulos semejantes, argumentó que la relación de la altura h de la columna a la altura h' de su bastón era igual a la relación de la longitud s de la sombra de la columna a la longitud s' de la sombra del bastón:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Puesto que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales usó un

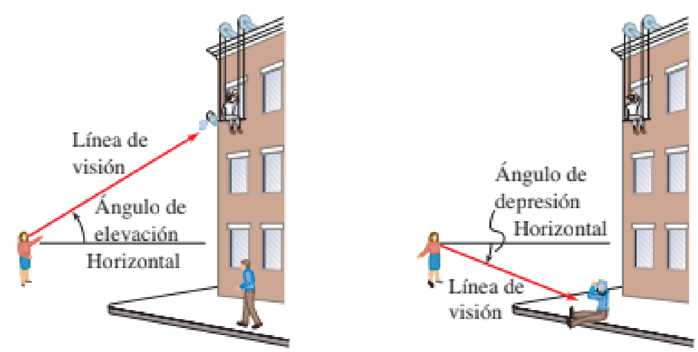
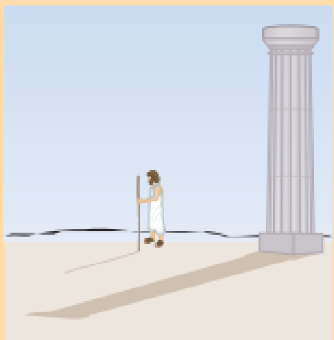


Figura 9

método similar para encontrar la altura de la Gran Pirámide en Egipto, una proeza que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aunque él [el rey de Egipto] te admira [Tales] por otras cosas, le gustó la manera particular mediante la cual mediste la altura de la pirámide sin tener que molestarte y sin ningún instrumento". El principio que usó Tales, el hecho de que relaciones de lados correspondientes de triángulos similares sean iguales, es la base de la materia de la geometría.



En el ejemplo siguiente se da una aplicación importante de la trigonometría al problema de medición: se mide la altura de un árbol alto sin tener que subirse a él. Aunque el ejemplo es simple, el resultado es fundamental para entender cómo se aplican las relaciones trigonométricas a tales problemas.

Ejemplo 5 Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

Solución Sea h la altura del árbol. De la figura 10 se puede observar que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

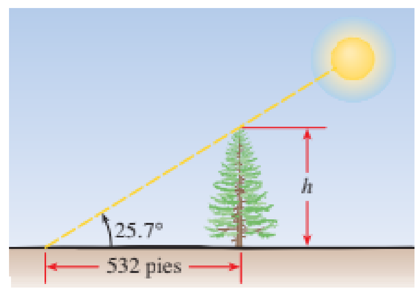


Figura 10

■

Ejemplo 6 Un problema relacionado con triángulos rectángulos

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a la parte superior de un asta de bandera sobre el edificio es 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta.

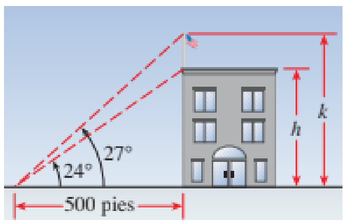


Figura 11

Solución En la figura 11 se ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra de la misma manera como se halló la altura del árbol del ejemplo 5.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Use una calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la longitud del asta de bandera, se determinará primero la altura desde el suelo hasta la parte superior del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27°$$

$$k = 500 \tan 27°$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud del asta, se resta h de k. Por lo tanto, la longitud del asta es cercana a $255 - 223 = 32$ pies. ■

Las teclas $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{SEN}}$ representan el "seno inverso". En la sección 7.4 se estudian las funciones trigonométricas inversas.

En algunos problemas es necesario hallar un ángulo en un triángulo rectángulo cuyos catetos se dan. Para hacer esto, se usa la tabla 1 (página 480) "hacia atrás"; es decir, se encuentra el *ángulo* con la relación trigonométrica específica. Por ejemplo, si sen $\theta = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el ángulo θ? De la tabla 1 se puede decir que $\theta = 30°$. Para hallar un ángulo cuyo seno no se da en la tabla, se usan las teclas $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{SEN}}$ o $\boxed{\text{ARCSEN}}$ en una calculadora. Por ejemplo, si sen $\theta = 0.8$, se aplica la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ a 0.8 para obtener $\theta = 53.13°$ o 0.927 radianes. La calculadora también proporciona ángulos cuyo coseno o tangente se conocen, con la tecla $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ o $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$.

Ejemplo 7 Determinar el ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies está apoyada en un edificio. Si la base de la escalera está separada 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo que forman la escalera y el edificio?

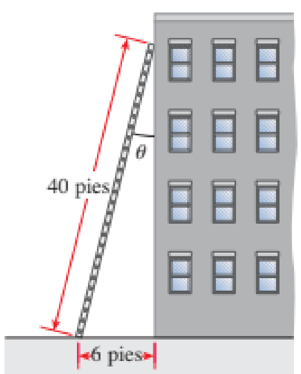


Figura 12

Solución Primero se bosqueja un diagrama como el de la figura 12. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\text{sen}\,\theta = \frac{6}{40} = 0.15$$

Por lo tanto, θ es el ángulo cuyo seno es 0.15. Para hallar el ángulo θ, se usa la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ en una calculadora. Con la calculadora en el modo de grados, se obtiene

$$\theta \approx 8.6°$$ ■

Recursos didácticos:

Los videos como material de apoyo, las clases y apoyarse mucho en la guía didáctica, propiciando un trabajo responsable.

Video: Números reales.

https://www.youtube.com/watch?v=x9Pp1rIrYsk&t=334s

Video: Medida angular

Definición de ángulo

https://www.youtube.com/watch?v=P97oPo-ChNA

https://www.youtube.com/watch?v=PKeUzxt-C_k

https://www.youtube.com/watch?v=L5GNg9a_gSc

https://www.youtube.com/watch?v=seR9VVW4DaI

Video: Funciones trigonometrías.

Triángulos

https://www.youtube.com/watch?v=uq7FR63AC6U

Razones trigonométricas

https://www.youtube.com/watch?v=WdfWMMrsCLo&t=116s

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

- ✓ Identifica los diferentes conjuntos numéricos.
- ✓ Reconoce las diferentes formas de medir ángulos.
- ✓ Aplica adecuadamente las razones trigonométricas para la solución de problemas e interpreta correctamente el resultado.