Tabla de Contenido

1. IDENTIFICACIÓN:

Área: Matemáticas (Geometría) **Grado:** Octavo **Tiempo:** 6 meses

Competencias
Comprende la congruencia y semejanza de triángulos.
Calcula el área de las diferentes figuras planas.
Reconoce los diferentes poliedros regulares..

Resultados de aprendizaje
Conceptualización de las propiedades y transformaciones de los triángulos mediante la congruencia y la semejanza de triángulos.
Reconocimiento de la semejanza de triángulos mediante información gráfica y analítica.
Construcción de figuras en el espacio.

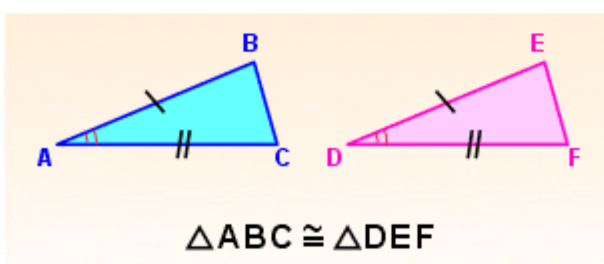
2. PRESENTACIÓN:

Esta guía está diseñada para el desarrollo de las habilidades enfocado al estudio de los tríangulos y sus principales propiedades como congruencia y semejanza. Los elementos mas importantes que se derivan del tiángulo y la introducción a las figuras en el espacio

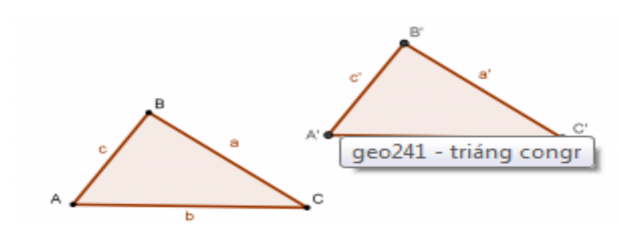
3. UNIDADES DE APRENDIZAJE:

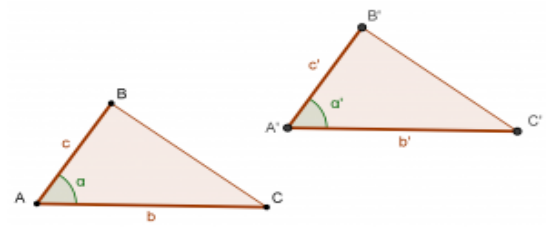
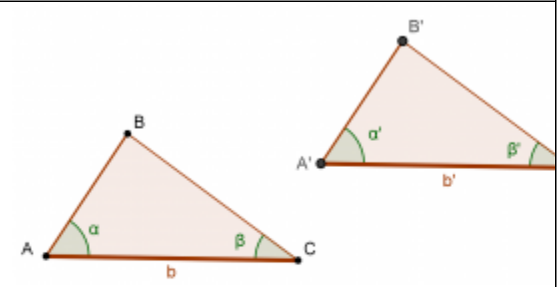
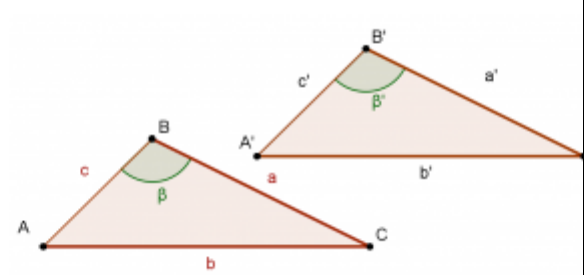
UNIDAD 1: CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

Se dice que dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida. Es congruente al triangulo DEF, la relación se escribe. ΔABC ≡ Δ DEF



CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

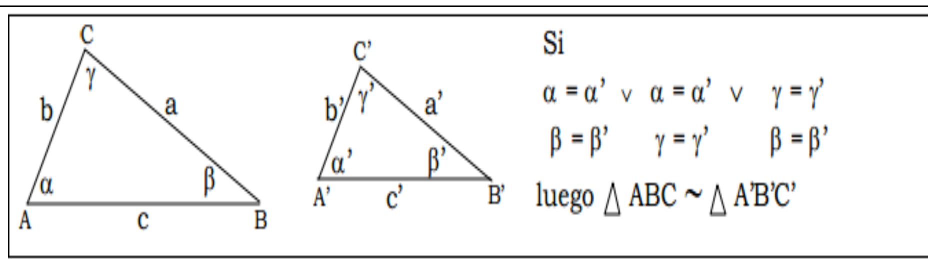
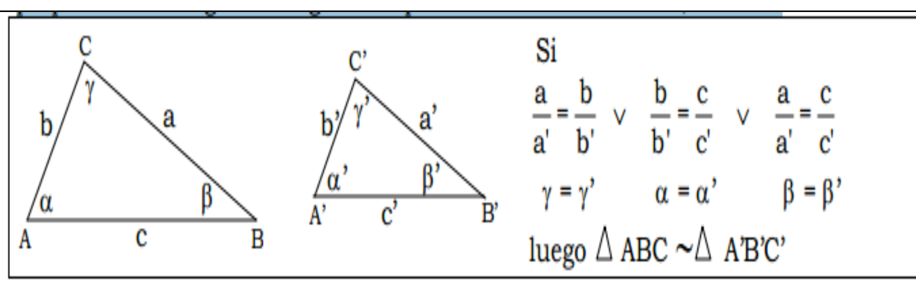
Primer criterio de congruencia: LLL. Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son respectivamente iguales. a ≡ a’ b ≡ b’ c ≡ c’	

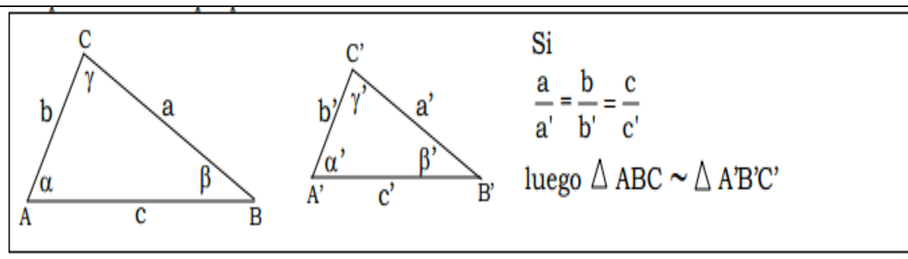
Segundo criterio de congruencia: LAL Dos triángulos son congruentes si son respectivamente iguales dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos. b ≡ b’ c ≡ c’ Angulo α ≡ ángulo α’	
Tercer criterio de congruencia: ALA Dos triángulos son congruentes si tienen un lado congruente y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado también congruentes. A estos ángulos se los llama adyacentes al lado. b≡b’ α≡α’ β ≡ β’	
Cuarto criterio de congruencia: LLA Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes. a ≡ a’ b ≡ b’ β ≡ β’	

SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados correspondientes proporcionales.

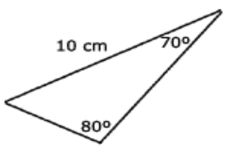
CRITERIOS FUNDAMENTALES DE LA SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Criterio 1: Dos triángulos son semejantes si poseen dos pares de ángulos iguales	
Criterio 2: Dos triángulos son semejantes si poseen dos pares de lados homólogos proporcionales e igual el ángulo comprendido entre tales lados; es decir	

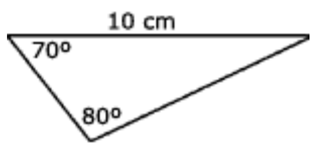
Criterio 3: Dos triángulos son semejantes si poseen sus tres lados homólogos respectivamente proporcionales	

Ejercicios

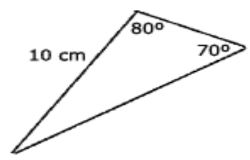
1. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes



I.



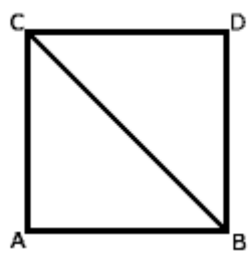
II.



III.

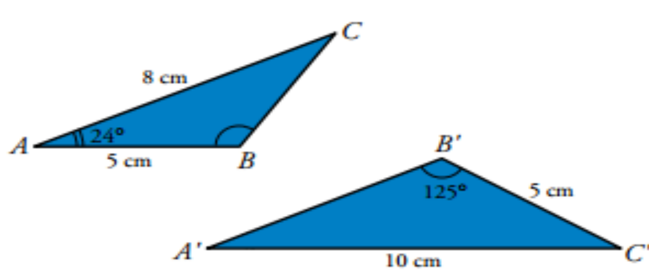
a) Sólo I y II b) Sólo I y III c) Sólo II y III d) I, II y III e) Ninguno

2. Un alumno para demostrar en el cuadrado de la figura que $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, determinó que AB ≅BD, que AC ≅DC y que el ∠CAB ≅∠BDC, por ser rectos. ¿Qué criterio de congruencia utilizó?



a) LLL b) LAL c) ALA d) AAL e) LLA

3. Nos aseguran que estos dos triángulos son semejantes

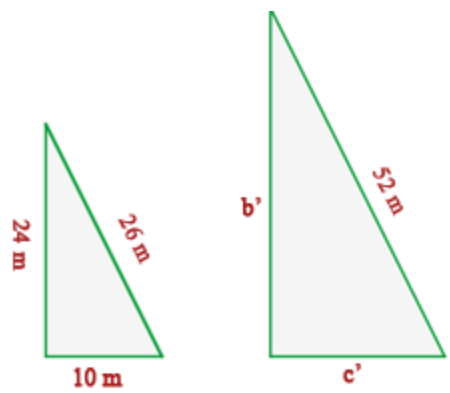


Halla los lados y los ángulos que les faltan a cada uno de ello.

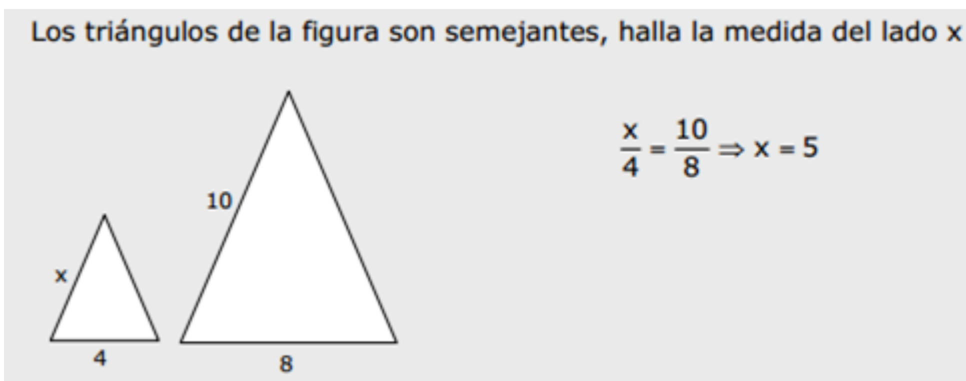
4. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro Semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza?
b) Halla los otros dos lados del segundo triángulo.
c) El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

5. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?



6.


Los triángulos de la figura son semejantes, halla la medida del lado x

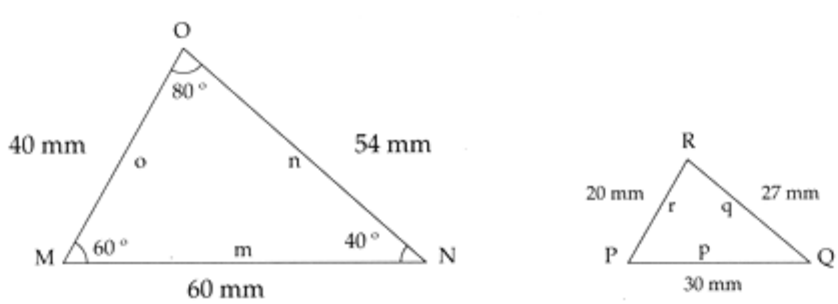
$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

7. Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 9, 36 y 49 cm.

8. Dos triángulos que tienen un ángulo de 20º y los lados que los forman en uno miden 6 y 15 cm, en otro, 4 y 10 cm ¿Son semejantes.

9. Un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 40º ¿es forzosamente semejante a un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 110º?

10. Decir si los siguientes triángulos son semejantes

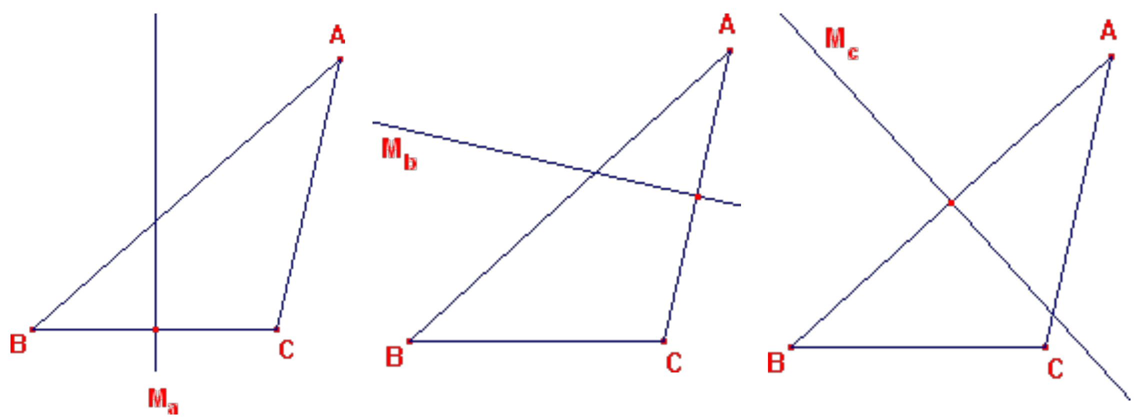


UNIDAD 2: RECTAS NOTABLES EN UN TRIANGULO

MEDIATRIZ

La MEDIATRIZ de un lado de un triángulo se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio.

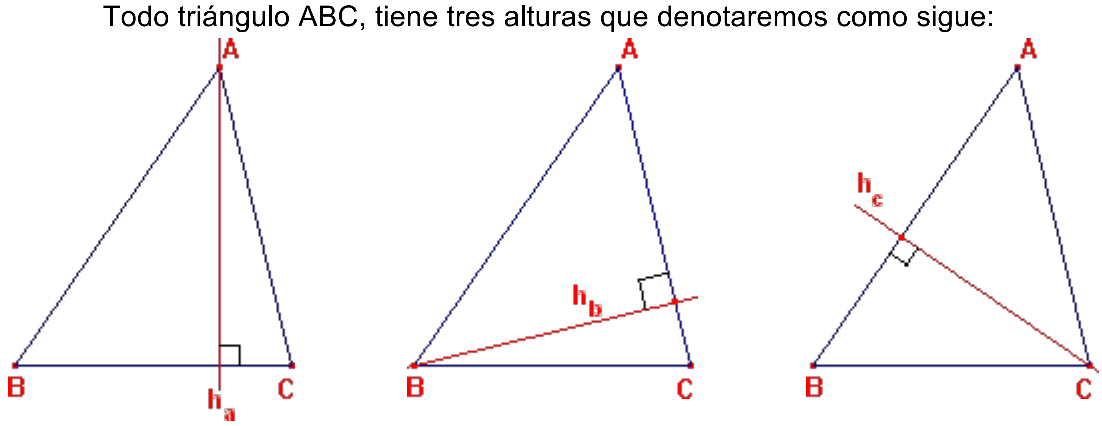
Todo triángulo ABC, tiene tres mediatrices que denotaremos como sigue:



ALTURA

La ALTURA de un triángulo, respecto de uno de sus lados, se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto.

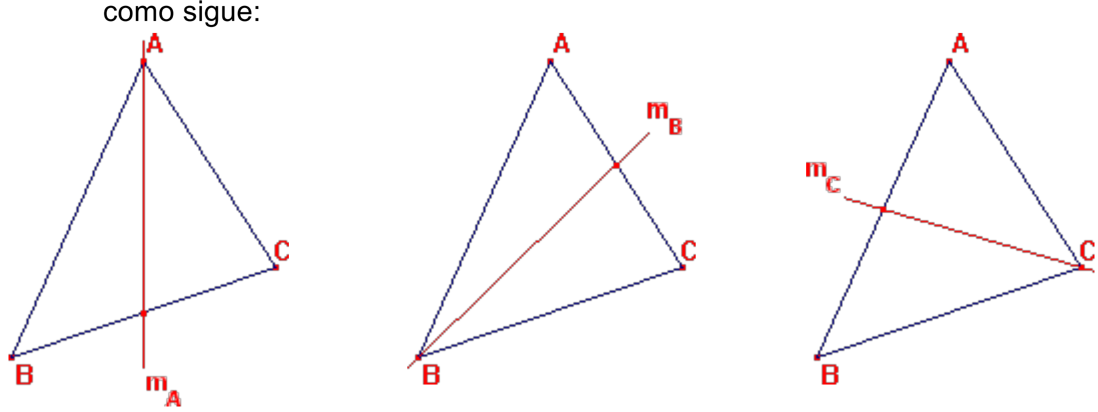
Todo triángulo ABC, tiene tres alturas que denotaremos como sigue:



MEDIANA

La MEDIANA de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, se define como la recta que une dicho vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

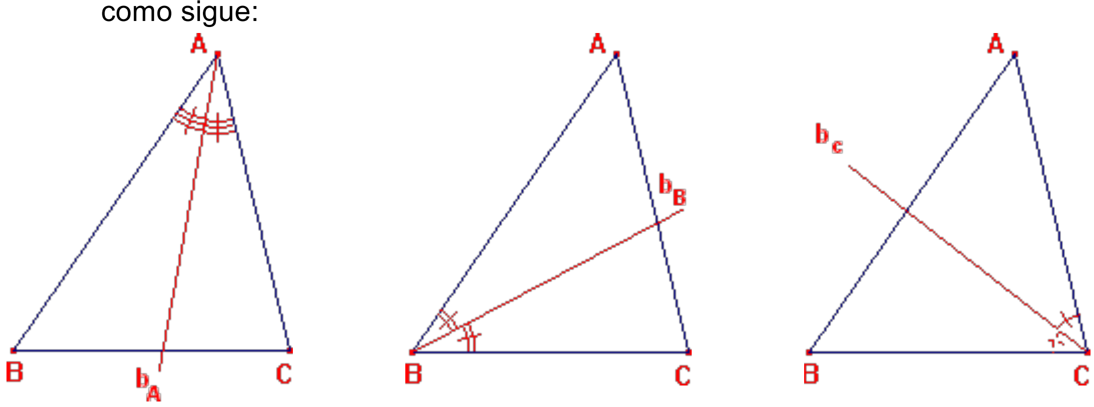
Todo triángulo ABC, tiene tres medianas (una por cada vértice) que denotaremos como sigue:



BISECTRIZ

La BISECTRIZ de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, se define como la recta que, pasando por dicho vértice, divide al ángulo correspondiente en dos partes iguales.

Todo triángulo ABC, tiene tres bisectrices (una por cada ángulo) que denotaremos como sigue:



Ejercicios

1. Con ayuda de una regla y un compás:
   a. Dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.
   b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres mediatrices de tu triángulo.
   c. Elige un punto cualquiera de la mediatriz del lado AB y, con ayuda de la regla o el compás, toma la distancia de dicho punto al vértice A y compárala con la distancia de dicho punto al vértice B. ¿Cómo son esas distancias?
   d. Repite el apartado anterior con otros puntos de esa misma mediatriz.
   e. Repite los dos apartados anteriores con las otras dos mediatrices.
2. Con ayuda de una regla y un compás:

   a. Dibuja un triángulo acutángulo y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.
   b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres alturas de tu triángulo.
   c. Observa si son interiores o exteriores al triángulo, y mira si concuerdan tus resultados con la propiedad 6.
   d. Repite el mismo ejercicio con un triángulo rectángulo.
   e. Repite el mismo ejercicio con un triángulo obtusángulo.

3. Con ayuda de una regla y un compás:
   a. Dibuja un triángulo acutángulo y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.
   b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres medianas de tu triángulo.
   c. Observa si coincide tu resultado con la propiedad 8.
   d. Calcula el área de los dos triángulos en que la mediana m_A divide al triángulo ABC y comprueba que se cumple la propiedad 9.
   e. Repite el mismo ejercicio con un triángulo rectángulo.
   f. Repite el mismo ejercicio con un triángulo obtusángulo.
4. Con ayuda de una regla y un compás:
   a. Dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta sus vértices con las letras A, B y C.
   b. Siguiendo los pasos indicados en las construcciones que has visto, dibuja las tres bisectrices de tu triángulo.
   c. Comprueba sobre tu dibujo que se cumple la propiedad 10.

UNIDAD 3: POLIEDROS

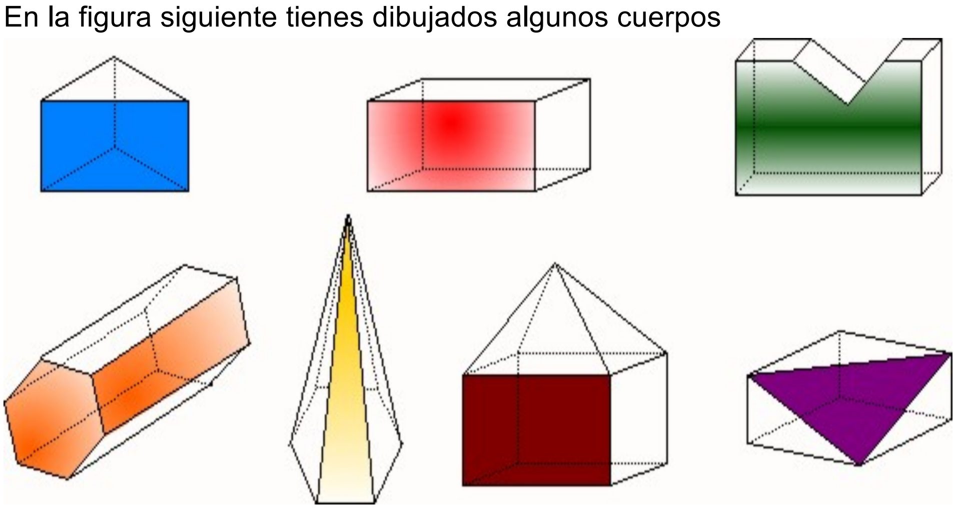
Definición

La palabra poliedro, etimológicamente, proviene del griego poli que significa muchos y edro que significa cara plana por lo tanto poliedro quiere decir muchas caras planas.

Podemos decir que un poliedro es un sólido delimitado por una superficie cerrada formada por regiones poligonales planas. Cada región se dice que es una cara del poliedro y los vértices y lados de las regiones se dice que son los vértices y lados del poliedro.

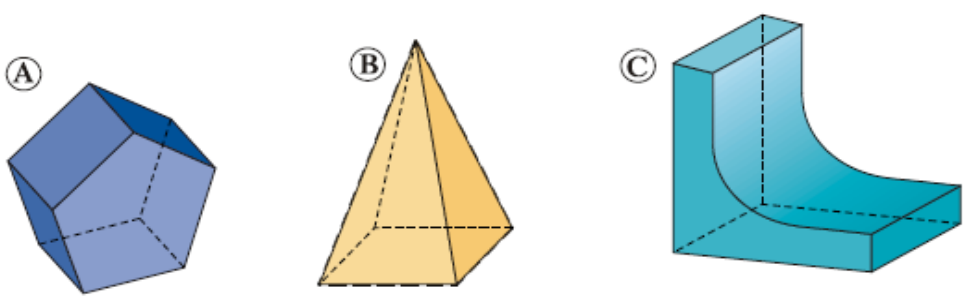
ACTIVIDAD 1

1. En la figura siguiente tienes dibujados algunos cuerpos



   a. ¿Qué características comunes ves a todos ellos?
   b. Dibuja otros tres cuerpos con las mismas características.
   c. Piensa objetos reales en los que aparezcan poliedros.

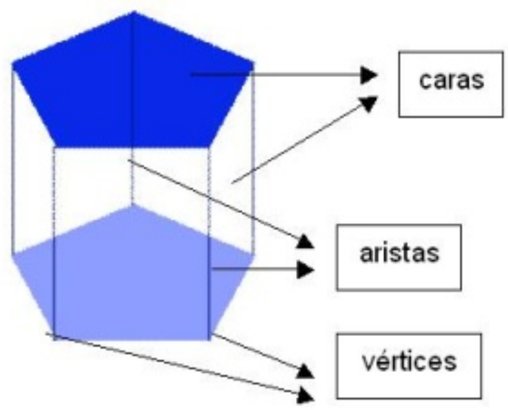
2. Cuáles de las siguientes figuras son poliedros y por qué?



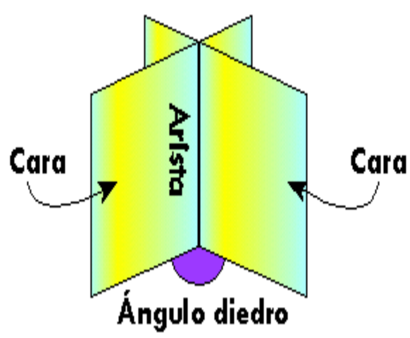
Estos cuerpos se llaman poliedros y podemos decir de forma simplificada que son sólidos limitados por caras en forma de polígonos.

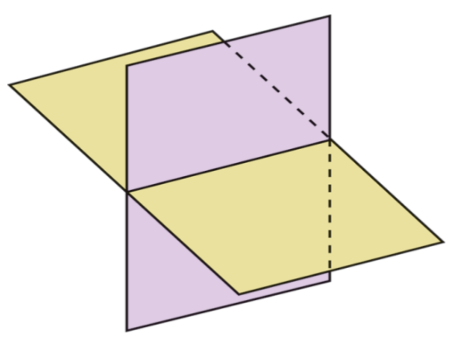
ELEMENTOS DE UN POLIEDRO

Los elementos que forma un poliedro cualquiera siempre serán cara, artista y vértice.



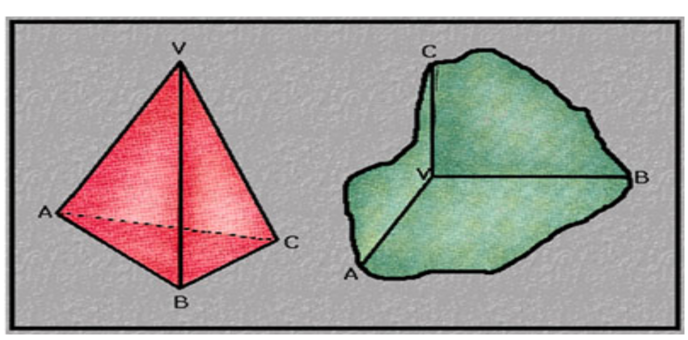
ÁNGULOS DIEDROS
Dos planos que se cortan, dividen el espacio en cuatro regiones. Cada una de ellas se llama ángulo diedro o simplemente diedro. Las caras del diedro son los semiplanos que lo determinan y la recta común a las dos caras se llama arista.



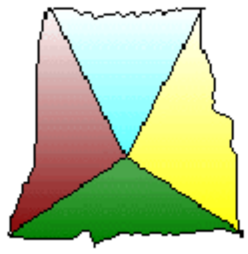


ANGULOS POLIEDROS
Si tenemos tres o más planos que se cortan mediante rectas que concurren en un mismo punto, la región de espacio que limitan se llama ángulo poliedro y al punto común se le llama vértice.
Según el número de caras que formen el ángulo poliedro, estos reciben un nombre diferente. Así, si son tres planos se le llama triedro, si son cuatro, tetraedro, si son cinco, pentaedro, etc.

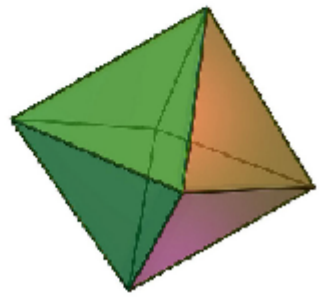
Angulo triedro: es el ángulo poliedro formado por tres semirrectas o aristas.



Angulo Tetraedro: Es el ángulo poliedro formado por 4 semirrectas o aristas.



Tetraedro

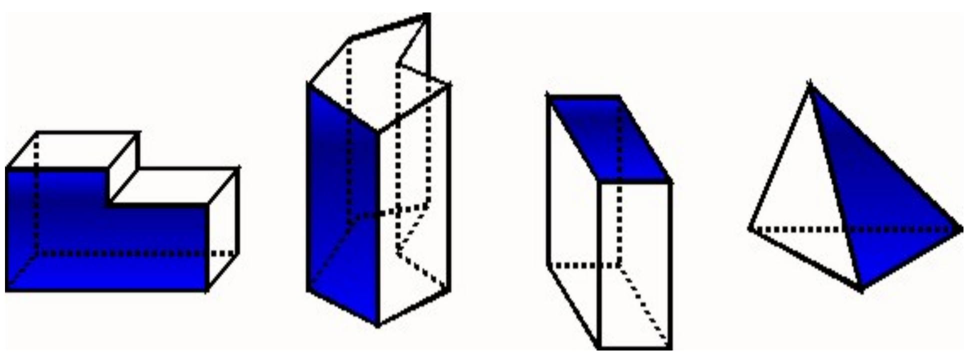


Ejercicio

1. ¿Encuentras algún triedro en tu aula?
2. ¿Se te ocurre algún lugar donde aparezcan tetraedros?

ACTIVIDAD 2

Observa los siguientes poliedros.

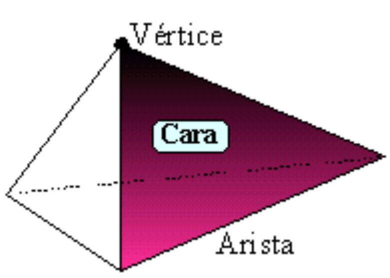


Si los sitúas en un plano, observa que hay dos que no se pueden apoyar sobre todas sus caras. ¿Cuáles son?. Sin embargo, los otros dos sí.

A los poliedros que tienen alguna cara sobre la que no se pueden apoyar, se les llama cóncavos y a los demás convexos.

ACTIVIDAD 3

En la figura siguiente tienes pintado un poliedro. En él se te indican algunos elementos característicos.



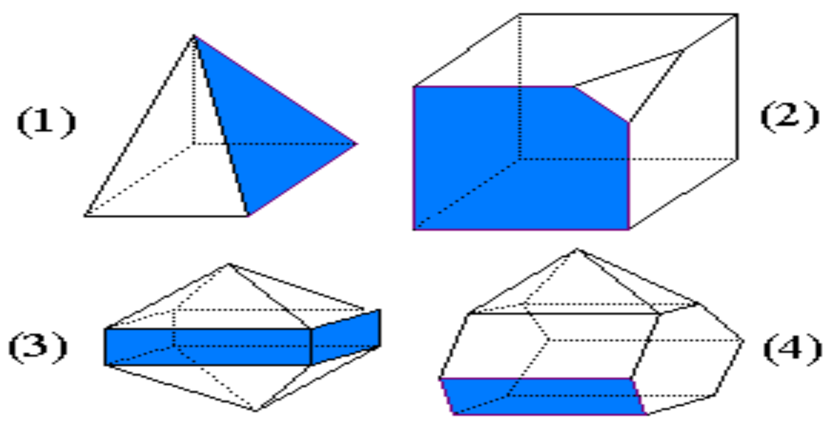
a. ¿Cómo definirías cada uno de estos elementos?
b. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene este poliedro?
c. ¿Cuántas caras se habrán de juntar en un vértice como mínimo?
d. ¿Cuánto pueden sumar los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo?

Al número de caras que concurren en un mismo vértice se le llama orden del vértice.

FÓRMULA DE EULER

ACTIVIDAD 4

En los poliedros de la figura, cuenta el número de caras, vértices y aristas y escríbelos en la tabla.



Poliedro	N° de caras (C)	N° de vértices (V)	N° de aristas (A)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

¿Encuentras alguna relación entre C, V y A? Inténtalo con otros poliedros.

En todos los poliedros convexos se verifica siempre que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos:

$$C + V = A + 2$$

Esta es la fórmula de Euler

ACTIVIDAD 5

En la siguiente tabla se dan algunos datos de poliedros convexos.

1. Complétala e intenta dibujar alguno de ellos.

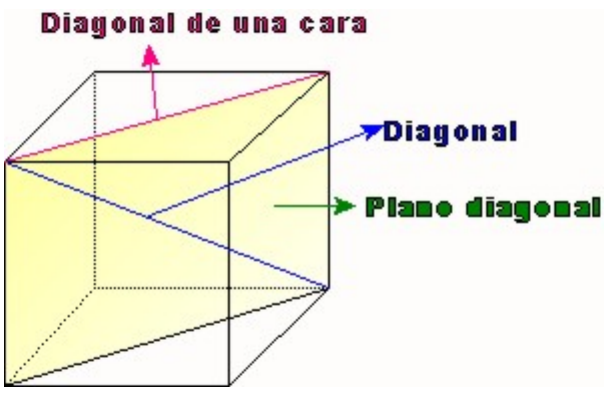
Poliedro	C	V	A
1	4		6
2		8	12
3	5	6	

2. Un poliedro tiene 7 caras. Cuatro de ellas son pentágonos y tres cuadriláteros.
   ¿Cuántas aristas tiene?
   ¿Cuántos vértices tiene?

   Nota: Observa que cada arista se forma uniendo dos lados de dos polígonos, lo cual nos permite relacionar el número total de lados con el de aristas.

3. Un poliedro tiene dos caras hexagonales y todas las demás son triángulos. Llamamos t al número de caras triangulares.
   a) Escribe una expresión para el número de aristas del poliedro.
   b) Usa la fórmula de Euler para una expresión del número de vértices.

   Hay otros elementos en los poliedros que debes conocer:



¿Cómo definirías la diagonal de un poliedro? ¿Y el plano diagonal?
¿Cuál es el número de diagonales y de planos diagonales del poliedro anterior?

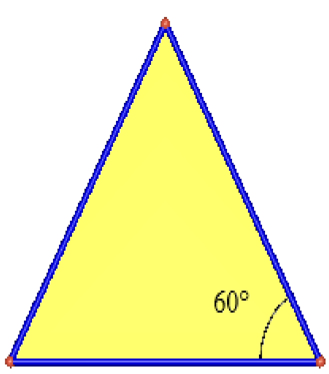
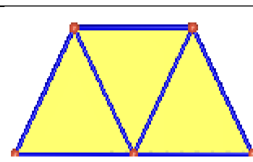
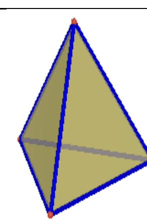
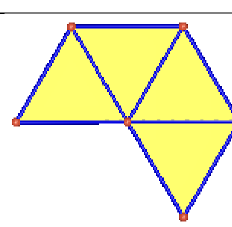
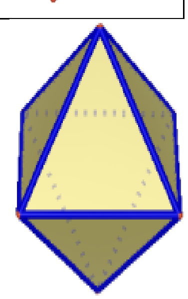
UNIDAD 4: POLIEDROS REGULARES

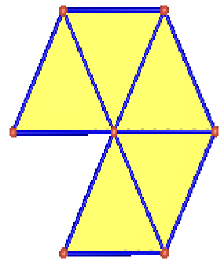
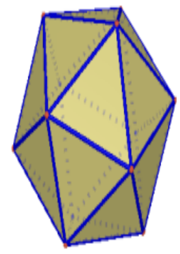
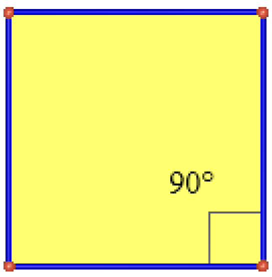
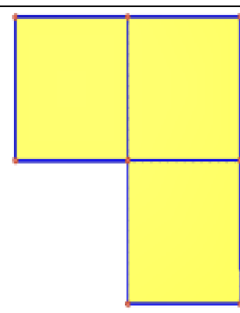
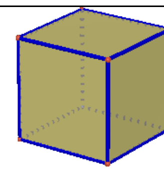
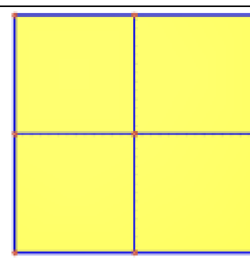
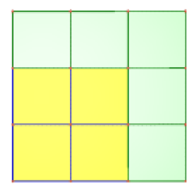
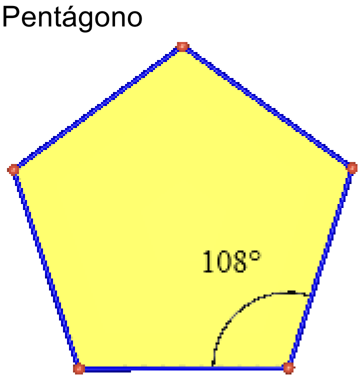
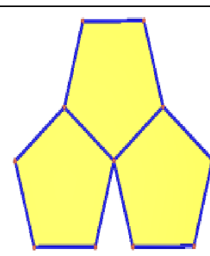
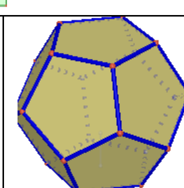
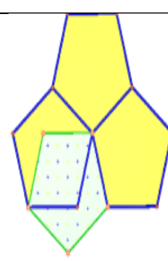
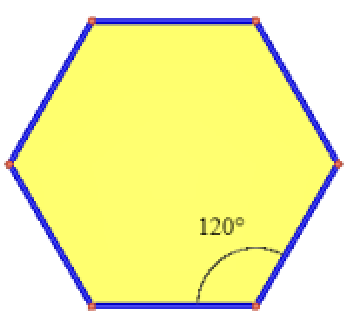
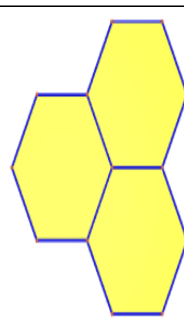
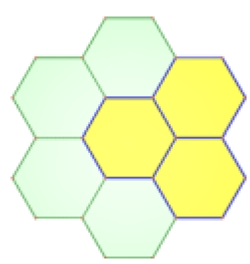
Se dice que un poliedro regular es aquel que tiene caras y ángulos iguales y el mismo orden de vértice.

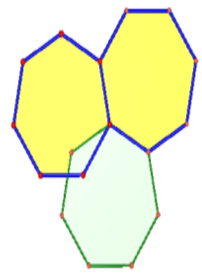
ACTIVIDAD 6

Teniendo en cuenta las dos condiciones básicas para que se forme un poliedro:
- En un vértice de un ángulo poliédrico han de concurrir tres o más caras.
- La suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliédrico ha de ser menor que 360 grados.

Razona por qué sólo hay 5 poliedros regulares.

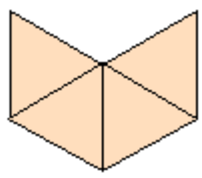
Polígono regular en cada cara.	Nº Polígonos por vértice y desarrollo de un vértice.			Poliedro regular.	
Triángulo equilátero 	3	3*60=180		Tetraedro	
	4	4*60=240		Octaedro	

	5	5*60=300		Icosaedro	
Cuadrado 	3	3*90=270		Hexaedro o cubo	
	4	4*90=360		No genera poliedro convexo, mosaico regular. 	
Pentágono 	3	3*108=324		Dodecaedro	
	4	4*108=432		No genera poliedro convexo.	
Hexágono 	3	3*120=360		No genera poliedro convexo, mosaico regular. 	

7 o más lados	3	3*128.6 >360		No genera poliedro convexo.

DESARROLLO DE POLIEDROS

1. Si en un poliedro cortamos por un número suficiente de aristas de forma que quede una sola pieza y la extendemos en el plano, obtenemos un desarrollo del poliedro.
2. Intenta dibujar dos desarrollos diferentes del tetraedro. ¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro?



3. En la figura (Anexo 1) tienes pintado un desarrollo de cada sólido platónico. Partiendo de ellos, intenta construirlos, dibújalos en una cartulina, recórtalos y constrúyelos.

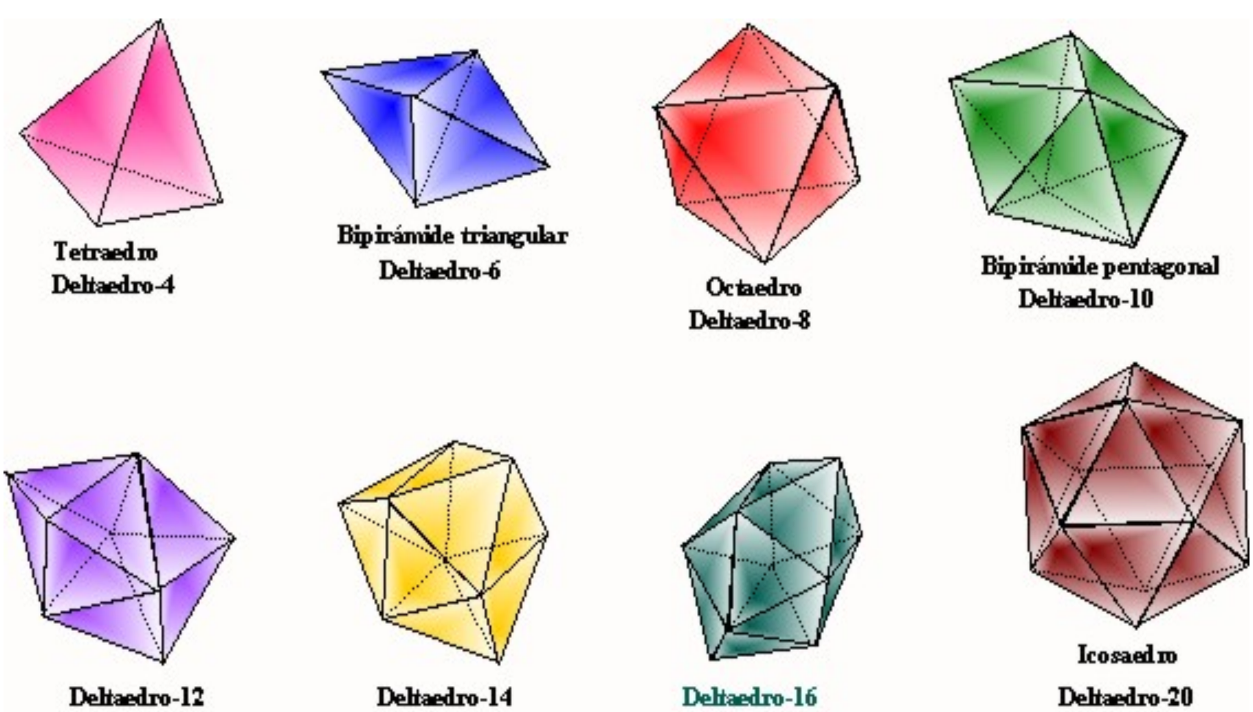
¡Ah! ¡No te olvides de las pestañas para poder pegar bien las aristas!.

Partiendo de un desarrollo del poliedro, es más sencillo construirlos.

DELTAEDROS

Los deltaedros son los poliedros convexos donde todas las caras son triángulos equiláteros idénticos. Hay 8 clases de deltaedros: tetraedro, octaedro, icosaedro, bipirámide triangular, bipirámide pentagonal,... y los deltaedros de 12, 14 y 16 caras.

A continuación se muestran los 8 deltaedros.



AREA TOTAL

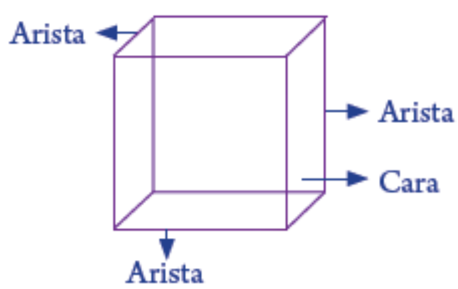
MOTIVACION

En un almacén se contratarán empleadas para el sector de regalos. Una de las pruebas es forrar una caja que tiene forma cúbica y encontrar la cantidad de papel a utilizar. Cada lado de la base mide 15 cm.

¿Cuál será el procedimiento para encontrar la cantidad de papel a utilizar?

AREA TOTAL DE UN CUBO

Recuerda que el cubo está formado por 6 caras cuadradas congruentes, que posee 8 vértices y 12 aristas. Como sus lados son cuadrados, sabes que a un cuadrado le puedes calcular su área, entonces a un cubo también le puedes calcular el área.



ÁREA LATERAL DE UN CUBO

Como un cubo posee cuatro caras laterales cuadradas congruentes, entonces para conocer el área lateral tienes que sumar dichas áreas.

Ya conoces que el área de un cuadrado es: $A = l^2$, Si extiendes las caras laterales tienes:

El área de esta región será la suma de las áreas de los 4 cuadrados:

$$A_{\text{lateral}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_{\text{lateral}} = \ell^2 + \ell^2 + \ell^2 + \ell^2$$

$$A_{\text{lateral}} = 4\,\ell^2$$

Si el lado de cada cuadrado es la arista del cubo, entonces para calcular el área lateral necesitas conocer la longitud de la arista. En este caso “ l ” representa la arista.

Ejemplo

Antonio pintará las paredes de una pila cuadrada cuyos lados miden 0.75 m. ¿Qué superficie pintará?

Solución:

Te das cuenta que el área a pintar son únicamente las cuatro paredes que la forman.

Significa que debes calcular el área lateral, utilizando la fórmula:

$$A_{\text{lateral}} = 4\,\ell^2$$

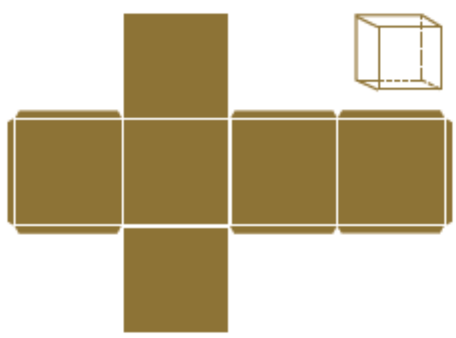
Como cada lado mide 0.75 m, entonces sustituyes en la fórmula:

$$A_{\text{lateral}} = 4\,\ell^2 = 4(0.75\text{ m})^2$$
$$= 4(0.5625\text{ m}^2) = 2.25\text{ m}^2$$

R: Entonces la superficie que Antonio pintará es 2.25 m^2

ÁREA TOTAL DEL CUBO

Si despliegas un cubo, obtienes una figura como la siguiente:



Observa la figura y notarás que para encontrar el área total tendrás que sumar las áreas de cada uno de los lados.

Es decir, el área total de un cubo es igual a:

$l^2 + l^2 + l^2 + l^2 + l^2 + l^2$ o simplemente es el producto de una de sus áreas por 6.

Entonces: Atotal = 6 l^2

Ejemplo

Rosa es empleada de un almacén en el sector de regalos, quiere calcular la cantidad de papel a utilizar para forrar un regalo de forma cúbica, que mide de arista 22 cm.

Solución:

Para encontrar la cantidad de papel que utilizará, tienes que aplicar la fórmula:

Atotal = 6 l^2 Al sustituir los datos tienes

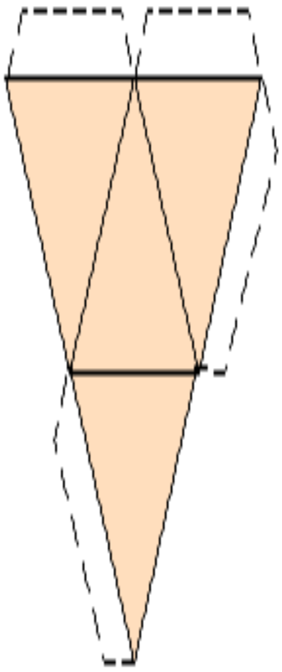
Atotal = 6 l^2 = 6(22 cm)^2 = 6 (484 cm^2) = 2,904 cm^2.

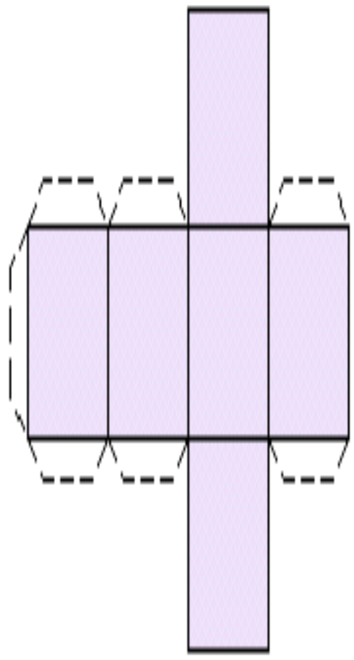
R: La cantidad de papel a utilizar es 2,904 cm2.

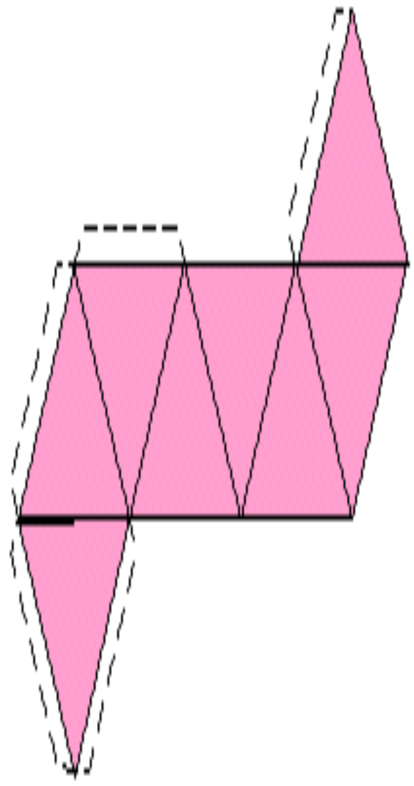
ACTIVIDAD 7

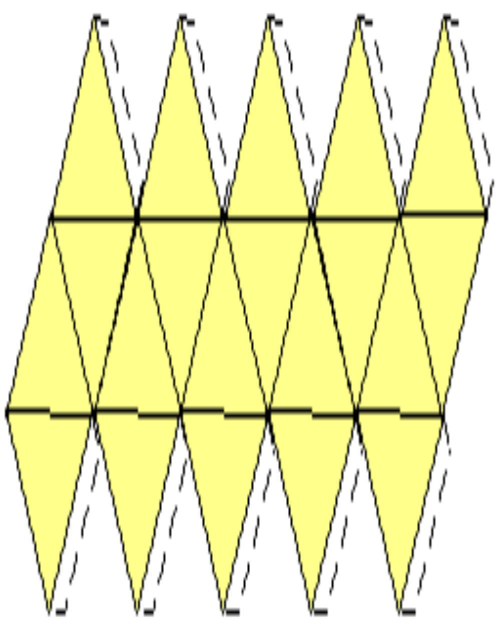
1. Julia quiere cubrir con papel lustre, las caras laterales (no sus bases) de una caja cúbica que mide de lado 35 cm. ¿qué cantidad de papel utilizará?
2. Encuentra el área total de un cubo que tiene sus aristas igual a 6 cm.
3. Don Manuel es un pintor que cobra $ 0.75 el metro cuadrado, y se le contrata para pintar un tanque de captación de agua de forma cúbica con dimensiones de 5 m de lado. ¿Cuál es el total de dólares que cobrará don Manuel por pintar todas las áreas del tanque a excepción de la parte superior?

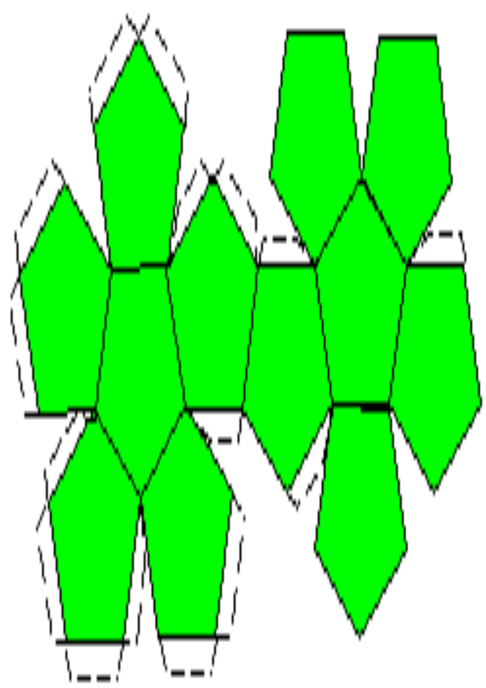
4. Una caja de galletas tiene forma cúbica y la longitud de cada lado es 13 cm. Calcula el área total de la caja sin su tapadera.
5. Juana tiene un recipiente de forma cúbica para guardar sus aretes y collares. Halla el área total del recipiente si sus aristas miden 12.5 cm.
6. Encuentra las medidas de las aristas de un cubo cuya área es igual a 384 cm2 .











4. GLOSARIO:

Segmento de recta: porción de una recta
Lados: son los segmentos de recta que conforman la figura geométrica
Radio: Distancia desde el centro hasta el extremo de la curva.
Perímetro: Suma de todos los lados de la figura
Área: Es el espacio encerrado entre rectas o curvas. Se mide en m cuadrados, cm cuadrados, etc.
Rectángulo: Figura geométrica plana con los dos lados horizontales iguales y los dos lados verticales también guales
Cuadrado: Figura geométrica plana con sus 4 lados iguales.
Triángulo: Figura geométrica plana que consta de 3 lados
Poliedro: Cuerpo geométrico cuyas caras son figuras planas
Polígono Convexo: Polígono que cada uno de sus ángulos miden a lo máximo 180 grados
Polígono cóncavo: polígono que al menos uno de sus ángulos mide mas de 180 grados

5. REFERENTES BIBLIOGRAFÍCOS:

[1] A.V. Pogorélov. Geometría elemental. Editorial mir Moscú.
[2] Wentworth, G., & Smith, D. E. (1981). Geometría plana y del espacio. Ginn y Compañía
[3] Cortázar, J. (1864). *Tratado de geometría elemental*. Imp. de Antonio Peñuelas.

6. CONTROL DEL DOCUMENTO:

Autor (es)	Nombre	Cargo	Dependencia	Fecha
	John Edisson Tunubalá Morales	Docente	Área Matemáticas	Abril de 2020

7. CONTROL DE CAMBIOS: (diligenciar únicamente si realiza ajustes a la guía)

Autor(es)	Nombre	Cargo	Dependencia	Fecha	Razón del cambio