Tabla de contenido

1. IDENTIFICACIÓN:

ÁREA: Matemáticas (matemáticas operativas) **GRADO:** Decimo **TIEMPO:** 10 meses

COMPETENCIAS:
Aplico los teoremas del seno y del coseno para la solución de problemas.
Argumento el uso de los teoremas del seno y del coseno en la resolución de problemas.
Identifico cuales son los ángulos que hacen posible que la ecuación trigonométrica sea verdadera.
Resuelvo identidades y ecuaciones trigonométricas de cualquier ángulo.
Resuelvo triángulos oblicuos, utilizando ley de senos y ley de cosenos.

RESULTADO DE APRENDIZAJE:
Comprender la ley de senos y cosenos en la resolución de problemas.
Realización de las ecuaciones trigonométricas, hallando los ángulos que la hacen verdadera.
Reconocimiento de la importancia de identificar cuando se debe aplicar la ley de senos y la ley de cosenos en un triangulo oblicuo.
Reconocimiento de la importancia de integrar el conocimiento matemático previo y su aporte al desarrollo y adaptación al nuevo aprendizaje.

2. PRESENTACIÓN: TRIGONOMETRIA

Esta guía esta diseñada para que el estudiante sienta la necesidad de experimentar y así mejorar sus conocimientos en esta área.

3. UNIDADES DE APRENDIZAJE:

Unidad 1: TRIGONOMÉTRIA

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

ETIMOLOGIA: La palabra trigonometría proviene de tres palabras griegas.
Tri = Tres.
Gono = ángulo.
Metría = Medios o medidas.

DIVISION DE LA TRIGOMETRIA:

A. **Trigonometría Plana**: Es la que estudia la resolución de los triángulos ubicados en el Plano.
B. **Trigonometría Esférica**: Estudia la resolución de los triángulos esféricos.

CREADORES DE LA TRIGONOMETRIA.

1. Hipparchus de Nicea (161 – 127 a. n. e.). Es considerado como el creador de la trigonometría.
2. Bartholomeus Pitescus (1561 – 1613), a él se debe el nombre de la trigonometría.
3. Leonardo Euler (1707 – 1787), fue quién dio a la trigonometría el carácter de rama independiente.

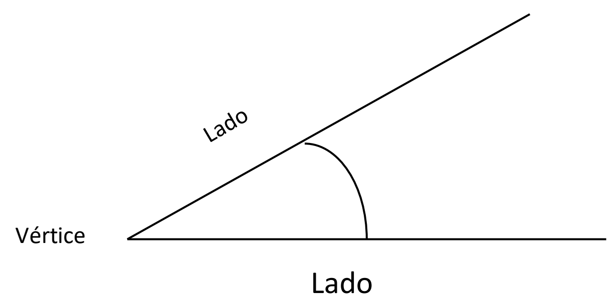
APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRIA:

Se dice que la trigonometría es una ciencia con aplicaciones ultramodernas, tales como:

1. Las distintas ramas de la matemática.
2. La física.
3. La astronomía.
4. La electrónica.
5. La geodesia.
6. La Navegación.
7. La Ingeniería

Definición de Ángulo:

Un ángulo es la unión de dos semirrectas o rayos con un origen común. Las dos semirrectas se llaman lados del ángulo y el origen común vértice.
Un ángulo se obtiene por la rotación de una semirrecta alrededor de su Origen.



CLASES DE ´ANGULOS:

CLASE DE ÁNGULOS	DESCRIPCIÓN
Ángulo Agudo	un ángulo de menos de 90°
Ángulo recto	un ángulo de 90°
Ángulo obtuso	un ángulo de más de 90° pero menos de 180°
Ángulo Llano	un ángulo de 180°
Ángulo reflejo ó cóncavo	un ángulo de más de 180°
Ángulo giro ó completo	Un ángulo de 360°
Ángulos complementarios	Son dos ángulos que suman 90°
Ángulos suplementarios	Son dos ángulos que suman 90°

SISTEMA SEXAGESIMAL

Si la longitud de una circunferencia se divide en 360 partes iguales, el ángulo definido por cada una de esas partes se llama grado sexagesimal.
Si un grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales, cada parte se llama minuto sexagesimal.
Si un minuto sexagesimal se divide en 60 partes iguales, cada parte se llama segundo sexagesimal.
Una de las unidades de medida para ángulos es el grado. Un ángulo de un grado es, por definición la medida del ángulo formado por 1/360 de una revolución completa en dirección contraria a las agujas del reloj.

Radianes

Se denomina radián al ángulo determinado por una longitud de arco de circunferencia igual a su radio. En otras palabras, una vez inscrito el ángulo en una circunferencia cualquiera, para medirlo en radianes se mide el arco de circunferencia dividido por el radio de la misma.

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = \frac{n^o\,grados}{n^o\,radianes} \Rightarrow n^o\,radianes = \frac{\pi}{180} n^o\,grados$$

$$\begin{array}{ccc} 360 & - & 2\pi \\ 30 & - & x \end{array}$$

$$\frac{360}{30} = \frac{2\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{60\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

UNIDAD	EQUIVALENCIA
1 Vuelta	**360° = 2 π radianes**
1 revolución	**360° = 2 π radianes**
1 π radian	**180° = 0.5 vueltas**

Un grado: 1° = 1 revolución / 360

CONVERSIÓN DE UNIDADES

La conversión de unidades se trabaja como una regla de tres simple o como una multiplicación de fraccionarios, si la unidad que se desea eliminar se encuentra en el numerador para cancelarla se coloca en el denominador y su equivalencia en el numerador.

Ejemplo:

1. Convertir 8 π radianes a grados

$$8\pi \cancel{radian}\,x\frac{180^\circ}{1\pi \cancel{radian}} = 8x180^\circ = 1440^\circ$$

Ejemplo:

2. Convertir $\frac{2\pi}{3}$ radian a grados

$$\frac{2\pi}{3}\cancel{radian}\,x\frac{180^\circ}{1\pi \cancel{radian}} = \frac{2x180^\circ}{3} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Ejemplo:

3. Convertir 4 vueltas a radianes y grados

$$4\,\cancel{vueltas}\,x\frac{2\pi radian}{1\cancel{vuelta}} = 4x2\pi radian = 8\pi radianes$$

$$4\,\cancel{vueltas}\,x\frac{360^\circ}{1\cancel{vuelta}} = 4x360^\circ = 1440^\circ$$

Ejemplo:

El valor en grados de un ángulo generado por 2 / 5 de revolución está dado por:

2 /5 Rev. = 2 / 5 (360°) = 144°

Ejemplo:
Un ángulo que mide 120º tiene un valor en revoluciones de:
Solución:
Si 1º = 1 Rev. /360, entonces 120º = 1/3 Rev. Así 120º = 1/ 3 Rev.

Actividad 1

Transformar el ángulo de grados a rad:

1) 15º   2) 35º   3) 80º   4) 150º   5)200º
6) 90º   7) 60º   8) 45º   9) 30º

Actividad 2

Transformar el ángulo de rad a grados:

1) $\frac{\pi}{5} rad$ 2) $\frac{\pi}{10} rad$ 3) $3\pi \ rad$ 4) $\frac{17\pi}{4} rad$

Actividad 3

Escribe el equivalente en grados del ángulo medido en radianes.

a. $\pi/2$ c. $\pi/3$ e. $2\pi/3$ g. $11\pi/12$ i. $5\pi/4$
b. $\pi/4$ d. $7\pi/12$ f. $3\pi/4$ h. $13\pi/12$ j. $4\pi/3$

Determinar la medida en grados que corresponde a los siguientes ángulos dados en radianes:

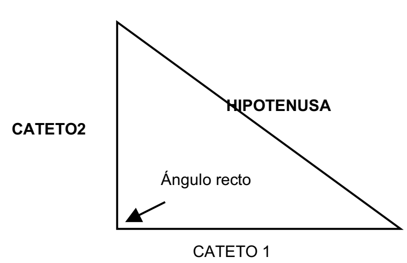
a. $5\pi/18$ b. 5π c. $-4\pi/3$ d. $-5\pi/2$
e. $\pi/9$ f. $-10\ \pi/3$ g. $13\pi/10$ h. $-11\ \pi/12$

Encontrar la medida en radianes que corresponde a la medida del ángulo dado en grados.

a. 100º   b. 72º   c. –1830   d. 54º
e. 630º   f. 95º   g. –3690º   h. 261º

Unidad 2: RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, es un ángulo cuya medida es 90°. En todo triángulo rectángulo el valor de la Hipotenusa es el lado más largo del triángulo.
Además la hipotenusa esta ubicada al lado opuesto del ángulo recto, los otros dos lados se llaman catetos

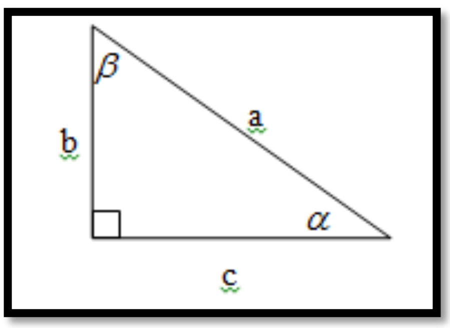


TEOREMA DE PITAGORAS:

El **Teorema de Pitágoras** lleva este nombre porque su descubrimiento recae sobre la escuela pitagórica.

Anteriormente, en Mesopotamia y el Antiguo Egipto se conocían ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los citados triángulos, tal como se indica en algunas tablillas y papiros, pero no ha perdurado ningún documento que exponga teóricamente su relación.

En todo triángulo rectángulo se cumple que la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de cada uno de los catetos al cuadrado.

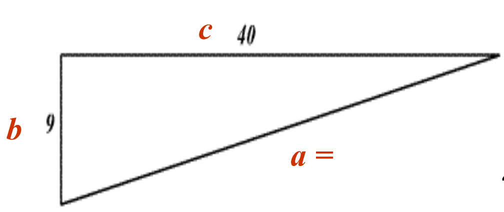


$$\boxed{a^2 = b^2 + C^2}$$

Para calcular el valor de la hipotenusa se utiliza la expresión $\boxed{a = \sqrt{b^2 + C^2}}$

Para calcular el valor de cualquier cateto se utiliza la expresión $\boxed{C = \sqrt{a^2 - b^2}}$ ó $\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$

Ejemplo:
Encontrar el valor de la hipotenusa de la siguiente figura



$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

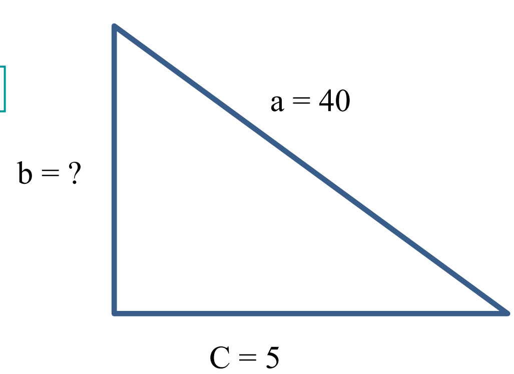
$$40^2 + 9^2 = a^2$$

$$1600 + 81 = a^2$$

$$\sqrt{1681} = a$$

a = 41

Ejemplo:
Encontrar el valor del cateto ***b*** de la figura
Aplicando el Teorema de Pitágoras: $\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$



$5^2 + b^2 = 40^2$ $\qquad$ $b^2 = 40^2 - 5^2$

$b^2 = 1600 - 25$ $\qquad$ $b^2 = 1575$

$b = \sqrt{1575}$

b= 39,7

Actividad 4

1. En un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, hallar la hipotenusa cuando:

a) a = 5, b = 12.
b) a = 8, b = 15.
c) a = 4, b = 5.
d) a = 15, b = 20.
e) a = 2 $\sqrt{2}$, b = 2 $\sqrt{2}$.

2. En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es c, hallar el cateto desconocido cuando:

a) a =8, c = 10.
b) b =10, c = 26.
c) a =20, c = 25.
d) b =21, c = 29.
e) a =5, c = 5 $\sqrt{2}$

3. Realizar estos ejercicios por el Teorema de Pitágoras (Recordar que a y b son los catetos , c es la hipotenusa)

a) *a = ? si b = 5 c = 8*

c) b = ? si a =3 c = 10

e) c = ? si a = 10 b = 15

g) a = ? si b = 7 c = 9

i) b = ? si a = 6 c = 10

b) c = ? si a = 13 b = 10

d) a = ? si b =2 c = 10

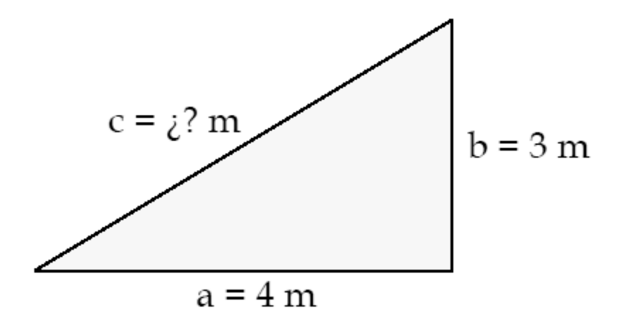
f) a= x, b=x+2, c=10. Hallar x

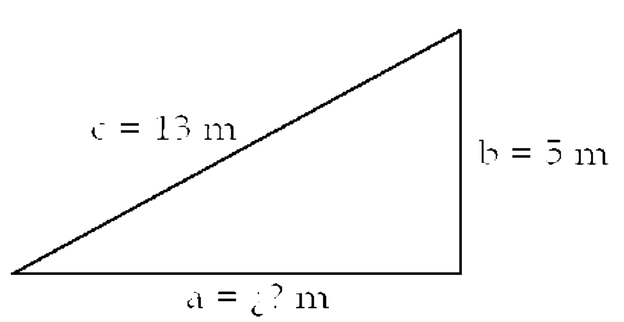
h) a=4, b= x-2 , c=x. Hallar x

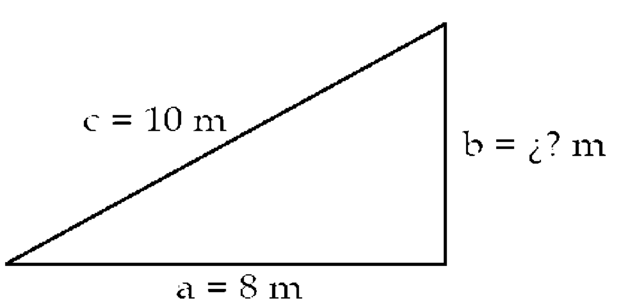
j) a= x+1 b=x-1, c=5. Hallar x

4. ¿Cuánto mide el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 7 m y otro cateto de 525 cm?

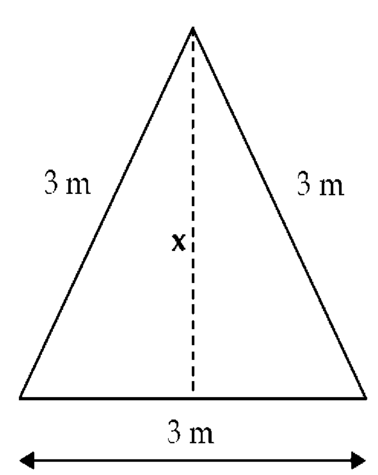
5. Calcular el lado desconocido en los siguientes triángulos:







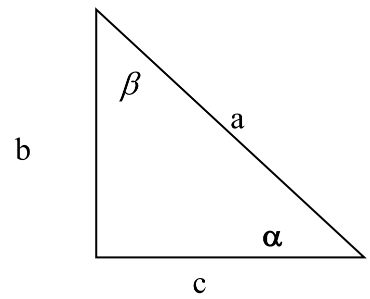
6. Para el siguiente triángulo equilátero calcular el valor de x, el perímetro y el área.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Utilizaremos un triángulo rectángulo para definir las funciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (cosec).
Dado un triángulo rectángulo ABC

a = hipotenusa
c = cateto
b = cateto adyacente del ángulo



Se definen seis relaciones trigonométricas, para el ángulo α así:

Seno α = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ Cos α = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente α = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ Cotangente α = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Secante α = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ Cosecante α = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

En notación

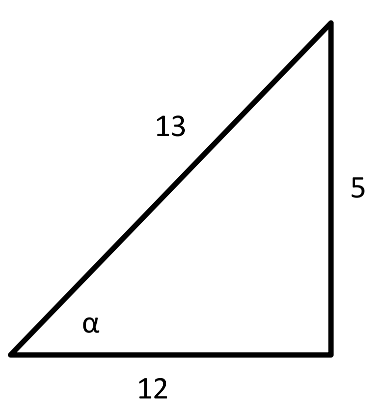
Sen $\alpha= \dfrac{b}{a}$ Cos $\alpha= \dfrac{c}{a}$ Tan $\alpha = \dfrac{b}{c}$ Cot $\alpha= \dfrac{c}{b}$

Sec $\alpha = \dfrac{a}{c}$ csc$\alpha = \dfrac{a}{b}$

Aquí podemos darnos cuenta que basta con conocer las funciones sen α y cos α para poder calcular las otras funciones, veamos por qué:

$$\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} \qquad \cot \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

Ejemplo:
Dado el triángulo rectángulo A D E encuentra el valor de las relaciones trigonométricas:



Solución

Sen $\alpha= \dfrac{5}{13}$ Tan $\alpha= \dfrac{5}{12}$ Sec $\alpha = \dfrac{13}{12}$

Cos $\alpha= \dfrac{12}{13}$ Cot $\alpha= \dfrac{12}{5}$ CSC $\alpha = \dfrac{13}{5}$

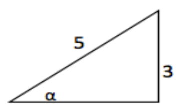
Ejemplo:

Un ángulo agudo α tiene $sen\alpha = \frac{3}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de este ángulo

Solución:

Usando triángulos

Por teorema de Pitágoras buscamos el otro cateto del triángulo, es que es 4



Ahora aplicamos las definiciones de las funciones trigonométricas y encontramos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{c.ad.}{hip} = \frac{4}{5}$$

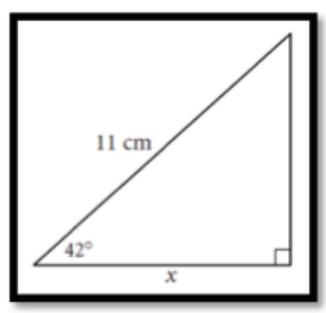
$$\tan\alpha = \frac{c.op.}{c.ad.} = \frac{3}{4} \qquad \cot\alpha = \frac{c.ad.}{c.op.} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{hip}{c.ad.} = \frac{5}{4} \qquad \cos ec\alpha = \frac{hip}{c.op} = \frac{5}{3}$$

Ejemplo:

Encontrar el valor de x, em la siguiente figura

Necesitas encontrar la longitud del lado adyacente al ángulo de 42°. Se te da la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que relaciona el lado adyacente con la hipotenusa es la razón coseno.



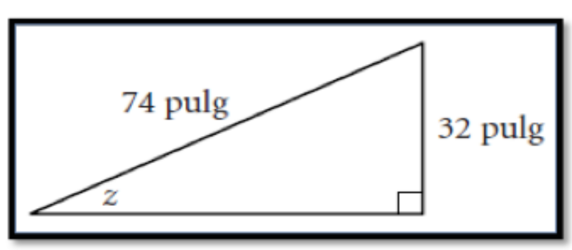
$Cos\ 42 = \frac{x}{11}$ $\qquad$ $11.Cos\ 42 = x$ $\qquad$ x = 8.2 cm

Ejemplo:

Encuentra la medida del ángulo opuesto al cateto de 32 pulgadas.

Solución

Se te dan las longitudes del lado opuesto al ángulo y la hipotenusa. La razón que relaciona estas longitudes es la razón seno.



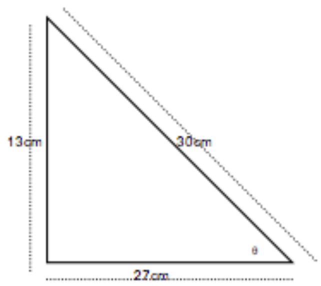
$$Sen\ z = \frac{32}{74} \qquad z = Sen^{-1}\left(\frac{32}{74}\right)$$

Para encontrar el ángulo con un seno de $\frac{32}{74}$ calcula el seno inverso de $\frac{32}{74}$

Utilizando la calculadora se tiene que $\boxed{Z = 25.6° \sim Z = 26°}$

Ejemplo:

Sea el triángulo XYZ rectángulo en Y, donde y = 30 cm; x = 13 cm; z = 27 cm. Hallar el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo θ



$$Sen\theta = \frac{13cm}{30cm} = 0.43 \qquad Cot\theta = \frac{27cm}{13cm} = 2.08$$

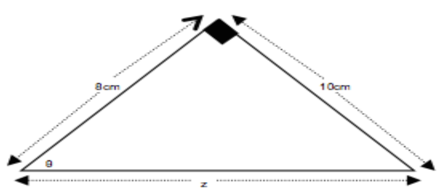
$$Cos\theta = \frac{27cm}{30cm} = 0.9 \qquad Sec\theta = \frac{30cm}{27cm} = 1.11$$

$$Tan\theta = \frac{13cm}{27cm} = 0.48 \qquad Csc\theta = \frac{30cm}{13cm} = 2.31$$

|

Ejemplo:

Hallar las seis funciones para el ángulo θ



Como no se conoce el valor de la hipotenusa, se debe determinar su longitud, para ello se aplica el teorema de Pitágoras.

Sea "z" el valor de la hipotenusa, entonces por Pitágoras se tiene

$$z^2 = (10cm)^2 + (8cm)^2$$

$z^2 = 100cm^2 + 64cm^2 \quad \Rightarrow z^2 = 164cm^2$ al sacar la raíz cuadrada queda que **z = 12.8cm** llevando este valor al triángulo se buscan las funciones trigonométricas, por lo tanto:

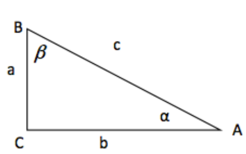
$$Sen\theta = \frac{10cm}{12.8cm} = \frac{10}{12.8} = 0.78 \qquad Cos\theta = \frac{8cm}{12.8cm} = \frac{8cm}{12.8} = 0.62$$

$$Tan\theta = \frac{10cm}{8cm} = \frac{10}{8} = 1.25 \qquad Cot\theta = \frac{8cm}{10cm}\frac{8}{10} = 0.8$$

$$Sec\theta = \frac{12.8cm}{8cm} = \frac{12.8}{8} = 1.60 \qquad Csc\theta = \frac{12.8cm}{10cm} = \frac{12.8}{10} = 1.28$$

Actividad 5

1) Si $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, encuentra las otras funciones. Entrega los valores simplificados y racionalizados.
2) Si $\cos\beta = 0{,}2$, encuentra las otras funciones.
3) Si $\tan\alpha = \frac{5}{9}$, encuentra las otras funciones.
4) Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usa calculadora.



a) α = 24º y c =16.

b) a = 32.46 y b = 25,78

c) α = 24º y a =16

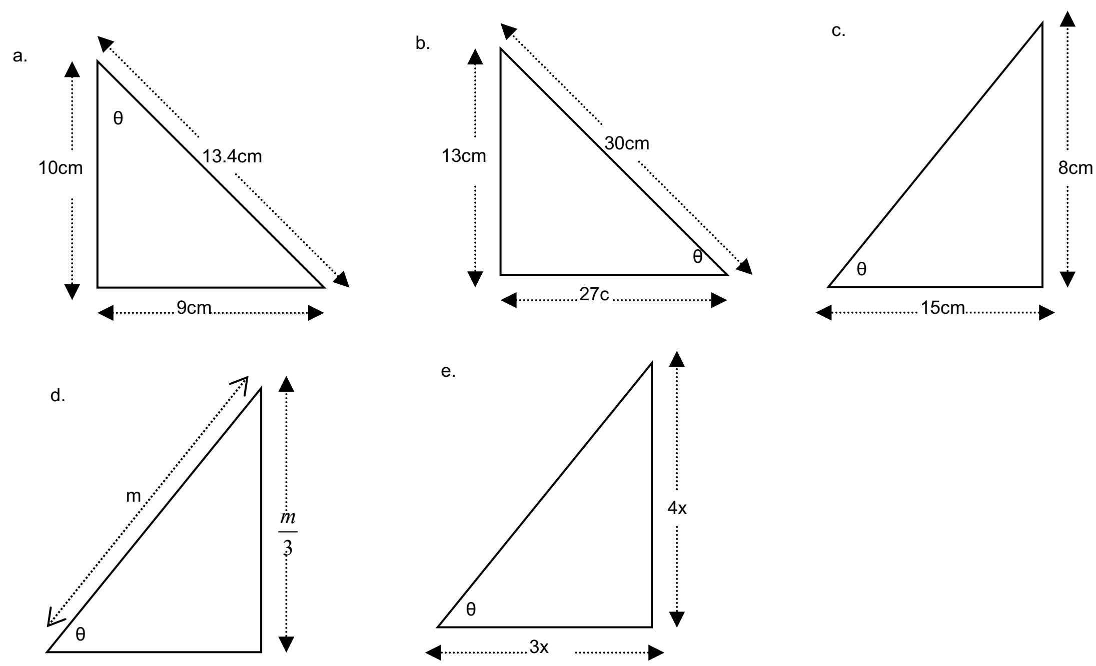
d) β = 71º, c = 44

e) a = 312,7 ; c = 809

f) b = 4.218 ; c = 6.759

g) β = 81º12’; a = 43,6

5) Hallar el valor de las funciones trigonométricas de θ de acuerdo a los valores presentes en las figuras



Unidad 3: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (y las operaciones aritméticas involucradas).

Notación: se define $sen^2\alpha$ como $(sen\ \alpha)^2$. Lo mismo se aplica a las demás funciones trigonométricas.

RESUMEN DE LAS PRINCIPALES FÓRMULAS E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES BÁSICAS

$$sen\theta \cdot csc\theta = 1 \quad\rightarrow\quad sen\theta = \frac{1}{csc\theta}, \quad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$cos\theta \cdot sec\theta = 1 \quad\rightarrow\quad cos\theta = \frac{1}{sec\theta}, \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

$$tan\theta \cdot cot\theta = 1 \quad\rightarrow\quad tan\theta = \frac{1}{cot\theta}, \quad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \quad\rightarrow\quad sen\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \quad\rightarrow\quad cos\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \quad\rightarrow\quad tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \quad\rightarrow\quad cot^2\theta = csc^2\theta - 1$$

IDENTIDADES PAR E IMPAR

Funciones Pares: $cos(-\theta) = cos\theta$ $\quad$ $sec(-\theta) = sec\theta$

Funciones Impares: $sen(-\theta) = -sen\theta$ $\quad$ $csc(-\theta) = -csc\theta$ $\quad$ $tan(-\theta) = -tan\theta$ $\quad$ $cot(-\theta) = -cot\theta$

IDENTIDADES PRODUCTO-SUMA

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)]$$

$$sen\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]$$

IDENTIDADES SUMA-PRODUCTO

$$sen\alpha + sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Para entender mejor te dejo este link para que mires algunos ejemplos:
https://www.youtube.com/watch?v=ZLaE4cS7oHc&t=377s

Ejemplo:

$$tg\,\alpha + \text{cotg}\;\alpha = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

$$tg\,\alpha + \text{cotg}\;\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha} = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

Ejemplo:

$$\text{cotg}^2\,a = \cos^2 a + (\text{cotg}\;a \cdot \cos a)^2$$

$$\cos^2 a + (\text{cotg}\;a \cdot \cos a)^2 = \cos^2 a + \text{cotg}^2\;a \cdot \cos^2 a =$$

$$\cos^2 a\,(1 + \text{cotg}^2\;a) = \cos^2 a \cdot \text{cosec}^2\,a = \frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2\,a} = \text{cotg}^2\,a$$

Ejemplo:

$$\text{cotg}\,a \cdot \sec a = \text{cosec}\,a$$

$$\text{cotg}\,a \cdot \sec a = \frac{\cos a}{\text{sen}\,a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\text{sen}\,a} = \text{cosec}\,a$$

Ejemplo:

$$\sec^2 a + \text{cosec}^2\,a = \frac{1}{\text{sen}^2\,a \cdot \cos^2 a}$$

$$\sec^2 a + \text{cosec}^2\,a = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\text{sen}^2\,a} = \frac{\text{sen}^2\,a + \cos^2 a}{\text{sen}^2\,a \cdot \cos^2 a} = \frac{1}{\text{sen}^2\,a \cdot \cos^2 a}$$

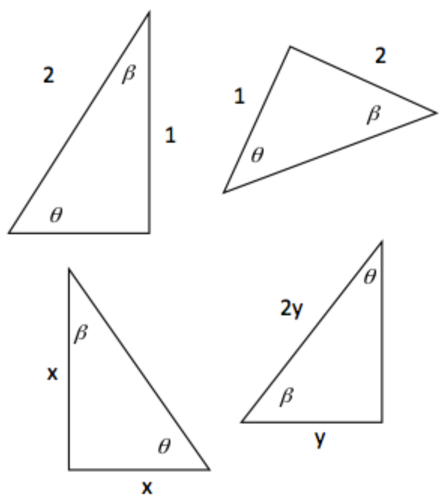
Actividad 6

Demostrar las siguientes actividades.

1. $Cos\;x\,.\,Sec\;x = 1$
2. $Sen\;x\,.\,Csc\;x = 1$
3. $(1 + Cos\;x)(1 - Cos\;x) = Sen^2\;x$
4. $\dfrac{Sen\;x}{1 - Cos\;x} = Csc\;x$
5. $\dfrac{Cos\;x}{Sen\;x} + Sen\;x = Csc\;x$
6. $Tan^2\;x\;Cos^2\;x = 1 - Cos^2\;x$
7. $\dfrac{Csc\;x}{Cot\;x + Tan\;x} = Cos\;x$

4. ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

1) Halla los valores exactos para seno, coseno y tangente del ángulo θ y β en cada triángulo.



2) Traza un triángulo para la razón trigonométrica dada y encuentra las otras cinco razones restantes.

a) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ b) $sen\beta = \dfrac{1}{2}$ c) $\csc\phi = 2$

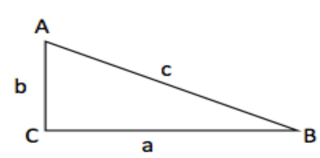
d) $\tan\phi = \dfrac{3}{2}$ e) $\cot\beta = \dfrac{2}{5}$ f) $\sec\alpha = 3$

3) Escribe todas las razones trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo, cuyos lados son 3cm, 4cm y 5cm.

4) Si $\cos\alpha = \dfrac{8}{10}$, busca las demás razones trigonométricas para el ángulo α

5) $sen\alpha = \dfrac{3}{4}$, halla el valor de la expresión sen $\alpha.\sec\alpha$

6) Con base en el triángulo rectángulo ACB, resuelve:



a) Si a = 44 y b = 5 halla las razones trigonométricas de los ángulos A y B

b) Si a = 5 y c = 16, halla las razones trigonométricas de los ángulos A y B

c) Si b = 6 y c = 10, halla las razones trigonométricas de los ángulos A y B

7) Uso la calculadora científica para comparar los valores de las funciones trigonométricas (escribo >, <, o, =)

a. $sen30°$ ( ) $sen\dfrac{\pi}{3}$ d. $\tan 30°.\sec 60°$ ( ) $sen\dfrac{\pi}{6}$

b. $\cos\dfrac{\pi}{4}$ ( ) $\cos\dfrac{\pi}{6}$ e. $\tan 60°.sen\dfrac{\pi}{4}$ ( ) $\cot 30°.\cos\dfrac{\pi}{4}$

c. $\tan 30°$ ( ) $\tan\dfrac{\pi}{4}$ f. $\csc 60° \cot\dfrac{\pi}{3}$ ( ) $sen60°.\tan\dfrac{\pi}{3}$

8) Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) sen 45° + cos 45° b) sen 30° + tan 60° / 1 – tan 30° x tan 60°

c) tan π/3 . tan π /6 + tan π /4 – csc (90° - π /3) d) sen 30° x tan 60° - cos 45°

e) 2 sen π /3 f) 4 sen 45° x csc 45°

g) sec π /6 – tan π /6 h) 2 sen 45° - tan 45° x sec 45°

i) tan2 30° + sen 60° k) j) sen 45° + tan 60° - csc 30°

sec2 π /6 – tan2 π /6

9) Resolver las siguientes identidades trigonométricas.

$1.\ Cos\theta(Sec\theta - Cos\theta) = Sen^2\theta$

$2.\ Ctg\theta(Tan\theta + Ctg\theta) = Csc^2\theta$

$3.\ \sec\theta(Sec\theta - Cos\theta) = \tan^2\theta$

$4.(Csc\theta + 1)(Csc\theta - 1) = Cot^2\theta$

$4.(Csc\theta - Cot\theta)(Csc\theta + Cot\theta) = 1$

$6.Cot\theta + \tan\theta = Sec\theta\ Csc\theta$

$7.Csc\theta - Sen\theta = Cos\theta\ Cot\theta$

$8.\dfrac{Tan\theta\ .\ Sen\theta}{Sec\theta - 1} = 1 + Cos\theta$

$9.\dfrac{Tan^2\theta + 1}{Tan^2\theta} = Csc^2\theta$

$10.\dfrac{1 + SenA}{CosA} + \dfrac{CosA}{SenA} = \dfrac{1 + SenA}{SenA\ .\ CosA}$

$11.\dfrac{TanA}{SecA} - \dfrac{SecA - CosA}{\tan A} = 0$

$12.\dfrac{1 - CosA}{SenA} + \dfrac{SenA}{1 - CosA} = 2CscA$

$13.\dfrac{SenA}{1 + SecA} - \dfrac{SenA}{1 - SecA} = 2CotA$

$14.\dfrac{1}{1 - SenB} = Sec^2B + SecB\ TanB$

$15.Sec^2B - Csc^2B = \dfrac{TanB - CotB}{SenBCosB}$

$16.Tan^2B - Sen^2B = Tan^2B\ Sen^2B$

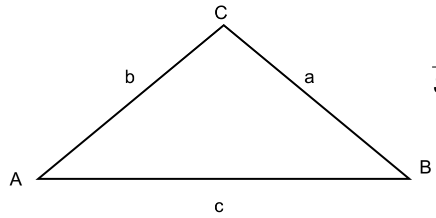
$17.\dfrac{1}{1 + Sen\ x} = \dfrac{1 - Sen\ x}{Cos^2\ x}$

$18.\dfrac{Sen\theta - Sen^3\theta}{Cos^2\theta} = \dfrac{1}{Csc\theta}$

Unidad 4: LEY DE SENOS y COSENOS

LEY DE SENOS

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



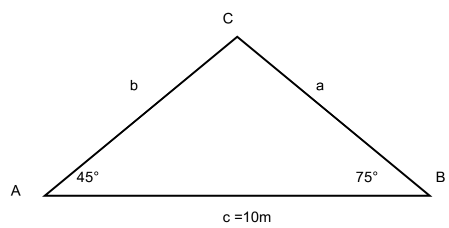
$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

La ley de los senos se cumple cuando los datos que se conocen son:

- Dos ángulos y un lado (A – L – A)
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (L – L – A)

Este ultimo es el más complicado ya que podemos tener UNA, DOS o ninguna solución. El procedimiento a seguir consiste en utilizar la ley de los Senos para encontrar uno de los dos ángulos que faltan y determinar si tenemos UNA, DOS o NINGUNA solución. Finalmente encontramos el ángulo faltante restando de 180°, y el problema se reduce al caso anterior.

Ejemplo:
Si A = 45°, B = 75° y c = 10 m; hallemos a, b y C
Tenemos Ángulo – Lado – Ángulo (caso 1)
Como A + B + C = 180°, entonces C = 180° - 120° = 60°
Aplicaremos la ley de los senos para hallar el lado "a"

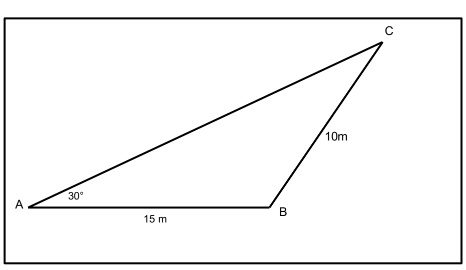


$$\frac{a}{SenA}=\frac{c}{SenC} \Rightarrow a=\frac{c.SenA}{SenC} \quad a=\frac{(10m).(Sen45°)}{Sen75°}$$
$$a=\frac{(10m).(0.70m)}{0.86} \Rightarrow a=8.14m$$

De la misma manera encontraremos el valor del lado "b"

$$\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC} \Rightarrow b=\frac{c.SenB}{SenC} \quad b=\frac{(10m).(Sen75°)}{Sen60°} \quad b=\frac{(10m).(0.96)}{0.86} \quad b=11.16m$$

Ejemplo:
Si A = 30°, a = 10m y c = 15m; hallemos B, C y b
Tenemos A – L – L (caso 2). Por lo tanto, el problema puede tener NINGUNA, UNA o DOS soluciones. Aplicaremos la ley de los senos para calcular C.



Solución

$$\frac{c}{SenC}=\frac{a}{SenA} \Rightarrow \frac{15m}{SenC}=\frac{10m}{Sen30°}$$
$$\Rightarrow SenC=\frac{15m.Sen30°}{10m} \Rightarrow SenC=0.75$$

Luego **C = 48.59°**, entonces **B = 101.41°**

Para calcular el lado "b" tenemos que $\frac{b}{SenB}=\frac{a}{SenA} \quad b=\frac{a.SenB}{SenA} \quad b=\frac{(10m).(Sen101.41°)}{Sen30°}$

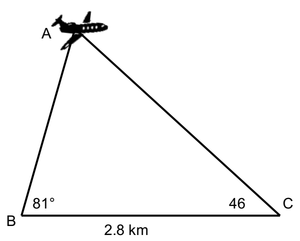
$$\Rightarrow b=\frac{(10m).(0.98)}{0.5} \quad \Rightarrow b=19.6m$$

Ejemplo:
Un avión que se encuentra en el punto A es observado por dos estaciones terrestres ubicadas en los puntos B y C. ¿A que distancia se halla el avión de B?
Se tiene A – L – A
Como A + B + C = 180°, ENTONCES A = 180° - 127° = 53°

Aplicamos la ley de los senos para calcular la distancia AB

$$\frac{2.8km}{Sen53°}\ \frac{AB}{Sen46°} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{(2.8km).(Sen46°)}{Sen53°} \quad AB = \frac{(2.8km).(0.72)}{0.8}$$

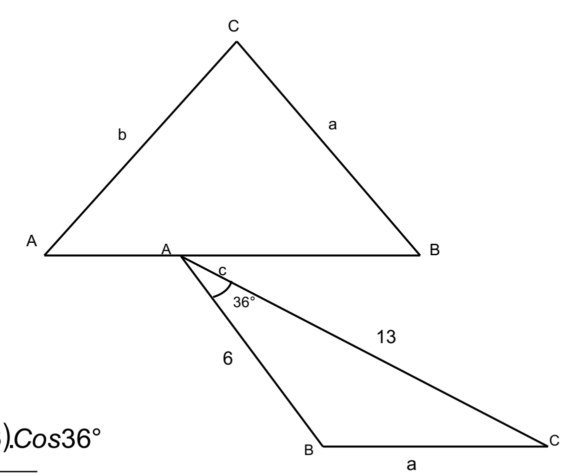
Luego tenemos que **AB = 2.52 km**



LEY DE COSENOS

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados.
La ley de los Cosenos se cumple cuando los datos conocidos son:

- Dos lados y el ángulo entre ellos (L – A – L)
- Los tres lados (L – L – L)



Ejemplo:
Resolver el triángulo ABC según sus datos

Tenemos el caso L – A – L, por tanto, aplicamos la ley de los cosenos
para calcular el lado "a"

$a^2 = b^2 + c^2 \quad 2.b.c.CosA$ entonces $a^2 = 13^2 + 6^2 \quad 2.(13).(6).Cos36°$

$a^2 = 169 + 36 \quad 156.(0.8090), \quad \Rightarrow \quad a^2 = 78.79 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{78.79} \quad a \approx 8.9$

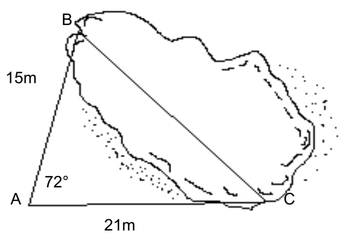
Para hallar la medida del ángulo B, también se aplica la ley de los Cosenos (aunque se puede aplicar la ley de los senos).

$b^2 = a^2 + c^2 \quad 2.a.c.CosB$ despejando CosB queda que: $CosB = \frac{a^2 + c^2 \quad b^2}{2.a.c}$ reemplazando queda:

$CosB = \frac{(8.9)^2 + (6)^2 \quad (13)^2}{2.(8.9).(6)} \approx \quad 0.5036$ Para buscar B se utiliza la función del Coseno inversa, entonces queda que $B \approx INV\,Cos(\quad 0.5036) \approx 120.2°$

Finalmente, C = 180° - A – C, Luego C = 180° - 36° - 120.2°, entonces **C = 23.8°**

Ejemplo:
Un topógrafo encuentra que el ángulo en el punto A desde donde observa los puntos B y C, en cada orilla del lago es 72°. Hallar la distancia a través del lago determinando la separación que hay entre los puntos B y C.



Los datos son dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, es decir el criterio L – A – L, por lo tanto, aplicamos la ley de los Cosenos para calcular la distancia BC.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.(AB).(AC).CosA$$

$$BC^2 = (15m)^2 + (21m)^2 - 2.(15m).(21m).Cos72°$$

Luego queda que $BC^2 = 225m^2 + 441m^2 - (630m^2).(0.3090)$, entonces $BC^2 = 471.31929m^2$
Al sacar la raíz cuadrada queda que **BC 0 21.71m**

Actividad 7

Emplear los teoremas del seno o del coseno para resolver los siguientes triángulos ABC.

1. a = 10 cm	b = 12 cm	C = 35º
2. c = 10 cm	B = 40º	A = 70º
3. a = 10 cm	b = 15 cm	B = 42º
4. A = 52º	B = 78º	c = 300.5 m
5. b = 4 km	a = 13 km	A = 53º
6. B = 113º	b = 248 cm	c = 195 cm
7. c = 40 cm	b = 50 cm	A = 29º
8. b = 20 cm	c = 30 cm	A = 60º
9. a = 150 cm	c = 30 m	B = 150º
10. a= 7 m	b = 6 m	c = 4 m
11. a = 9 m	b = 7 m	c = 4 m

Unidad 5: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las ecuaciones trigonométricas son igualdades de expresiones trigonométricas que se cumplen únicamente para ciertos ángulos.
Son las ecuaciones que tienen como incógnita una o varias funciones trigonométricas.
Resolver una ecuación trigonométrica consiste en encontrar los ángulos que hacen verdadera la igualdad. Como las funciones trigonométricas son periódicas, existen infinitos ángulos que hacen verdadera una ecuación; por lo tanto, es conveniente restringir el conjunto solución a los ángulos comprendidos en un periodo.

Reglas:

1. Se transforman todas las funciones trigonométricas en función de una sola, generalmente Seno, Coseno o Tangente.
2. Se resuelve algebraicamente la ecuación resultante (generalmente una ecuación de segundo grado).
3. Se desechan las soluciones que no satisfagan a la ecuación dada.
4. Se busca el ángulo o ángulos que cumplan con la ecuación.

Los procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas son similares a los empleados para resolver ecuaciones algebraicas. La diferencia principal radica en que las ecuaciones trigonométricas se resuelven para las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante y de estas se determina los valores del ángulo.

Ejemplo:
Resolver $4Sen^2x + 4Senx – 3 = 0$
Este es una ecuación de segundo grado en Senx por lo tanto hay que identificar los coeficientes y aplicar la formula correspondiente.

a = 4; b = 4; c = -3

$$\text{Senx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{16 - 4.(4).(-3)}}{2.(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

$\text{Senx}_1 = \frac{-4+8}{8} = \frac{+4}{8} = \frac{1}{2}$

$\text{Senx}_2 = \frac{-4-8}{8} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

La solución Sen x = $-\frac{3}{2}$ es inadmisible porque el seno de cualquier ángulo no puede valer en su valor absoluto más de uno.

Para $\text{Sex}_1 = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ pertenece a un ángulo de 30°.

X = $\text{Sen}^{-1}\frac{1}{2}$ Para X_1 = 30°; para X_2 = 150°

Siempre que en un problema hay que elevar al cuadrado o sacar raíces es necesario comprobar las soluciones porque algunas veces aparecen soluciones extrañas que no cumplen con el enunciado.

<u>Comprobación</u>

Para X = 30° se tiene entonces 4. Sen^2 30° + 4. Sen 30° - 3 = 0

Ejemplo:

Resolver $\sqrt{2}.Cosx - 1 = 0$ Para 0 < x < 360°

$\sqrt{2}.Cosx - 1 = 0$; $.Cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Racionalizando se tiene que $.Cosx = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego se tiene que x = $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$; Los cosenos son positivos en el primer y cuarto cuadrante y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde a 45°

Actividad 8

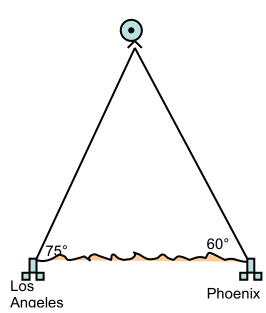
Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1. $\text{Sen}^2x \quad 1 = 0.$
2. $2\text{Senx} - \sqrt{3} = 0.$
3. $\text{Tan}^2\theta - 1 = 0.$
4. $\text{Cos}^2\theta - \frac{1}{4} = 0.$
5. $\text{Cos}^2\theta - \text{Cos}\theta = 0.$
6. $\text{Sen}^2\theta + 2\text{Sen}\theta - 3 = 0.$
7. $\text{Sen..Cos}\theta + \text{Sen}\theta = 0.$
8. $4\text{Cos}^2\theta - \text{Cos}^2\theta - 1 = 0.$
9. $\text{Sec}^2\theta = 2\text{Tan}^2\theta.$
10. $2\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta. - 1 = 0$
11. $\frac{1}{\text{Sen}\theta} + \frac{1}{\text{Tan}\theta} = 1$
12. $\frac{1}{\text{Csc}^2\theta} \quad 1 = \text{Cot}^2\theta\text{Sen}^2\theta$
13. $3\text{Cos}^2x + \text{Sen}^2x = 2$
14. $\frac{1}{\text{Csc}^2\theta} - 1 = -\text{Cot}^2\theta\text{Sen}^2\theta$
15. $\text{Sen}\theta + \sqrt{3}\text{Cos}\theta = 0$
16. $4\text{Cos}^2\theta - 2(1+\sqrt{2})\text{Cos}\theta + \sqrt{2} = 0$
17. $\text{Tan}\theta(1 - 2\text{Sen}\theta) - 2\cos\theta = 0$
18. $\text{Cos}\theta(1 - \text{Tan}\theta) - \text{Sen}\theta(1 + \text{Cot}\theta) = 1$
19. $5\text{Cos}^2x - 3\text{Senx} + 5 = 0$
20. $9\text{Cot}^2\theta + (3 - 3\sqrt{3})\text{Cot}\theta - \sqrt{3} = 0$
21. $\text{Tan}\theta + \text{Sec}\theta = 1$

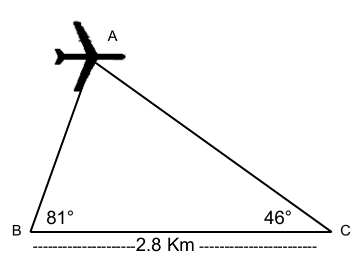
5. ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN.

Realiza los siguientes ejercicios, utilizando la ley de senos o ley de cosenos.

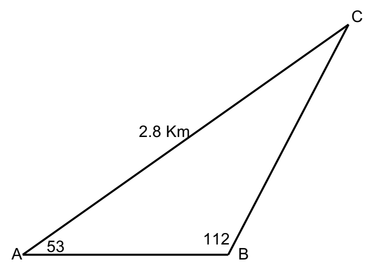
- Una escalera de 5 m de largo es recostada sobre un muro inclinado, alcanzando una altura de 5 m sobre dicho muro. Si la parte inferior de la escalera está a 2.5 m de la base del muro, halla la inclinación del muro
- Un topógrafo situado en un punto c localiza dos puntos A y B en los lados opuestos de un lago. Si c está a 5 km de A y a 8 km de B y además el ángulo c mide 36º. Calcula el ancho del lago.
- Si los lados de un triángulo ABC miden a= 4 cm, b = 7 cm y c = 10 cm, determina el ángulo mayor.
- Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 30º y 55'. Si el lado opuesto del ángulo menor mide 115 cm determina la longitud del lado mayor
- Hallar el área de un triángulo ABC si a = 326 dm, b = 185 dm y c = 243 dm
- Hallar el área de un triángulo ABC si a = 36 m, A = 49º y C = 63º
- Una carrilera (una línea en recta) de 180 km de longitud tiene por extremos las ciudades A y B; otra carrilera (en línea recta) de 260 km de longitud continúa el recorrido de la ciudad B a la ciudad C. Si las carrileras forman entre sí un ángulo de 132, 5º calcular la distancia entre las ciudades A y C.
- Dos trenes parten simultáneamente de una misma estación, en direcciones tales que forman un ángulo de 30º. Uno va a 15 km / h y el otro a 25 km / h. Determinar a qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje.
- Un observador mira los edificios E_1 y E_2 desde un tercer edificio E_3, situado a 500 m de E_1 Y 800 m de E_2.Si el ángulo que forman las líneas visuales es de 132º, determinar la distancia que separa los edificios E_1 y E_2.
- Un satélite en orbita terrestre pasa directamente por encima de estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, a 340 millas de distancia. En un instante cuando el satélite está entre esas dos estaciones, simultáneamente se observa que el ángulo de elevación es de 60° en Phoenix y de 75° en los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de los Ángeles?



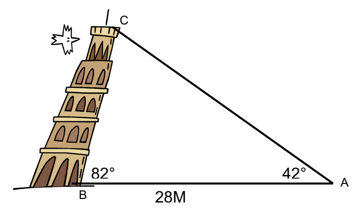
- Un avión que se encuentra en el punto A es observado por dos estaciones terrestres ubicadas en los puntos B y C. ¿A que distancia se halla en avión de B?



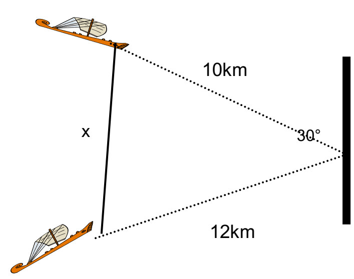
- Una persona que se encuentra en el punto A desea dirigirse al punto C, que se encuentra a 2.8 km en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones, decide seguir la trayectoria de A a B para dirigirse, finalmente, hacia C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?



- La torre inclinada de Pisa forma un ángulo con la horizontal de 82°. Determinar la distancia BC si se sabe que la distancia entre AB es 28m



- 25.Dos barcos se dirigen en línea recta hacia el mismo puerto, el ángulo que forman sus trayectorias mide 30°. Un barco recorre 10km antes de llegar al puerto mientras el otro recorre 12km. ¿A qué distancia se encontraban los barcos?



Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$
b) $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$
c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$
d) $sen^2 x - \cos^2 x = 1/2$
e) $sen2x \cdot \cos x = 6sen^3 x$
f) $2\cos x = 3tgx$

Indicaciones: Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo seno(algo) = un número, sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.). Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar trasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

$\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha / \cos\alpha$

$1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

Ángulo suma

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\text{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \pm \text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta$
$\text{tg}(\alpha + \beta) = (\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) / (1 - \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta)$
$\text{tg}(\alpha - \beta) = (\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) / (1 + \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta)$

Ángulo doble

$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos2\alpha = \cos2\alpha - \text{sen}2\alpha$
$\text{tg}2\alpha = (2\text{tg}\alpha) / (1 - \text{tg}2\alpha)$

Ángulo mitad

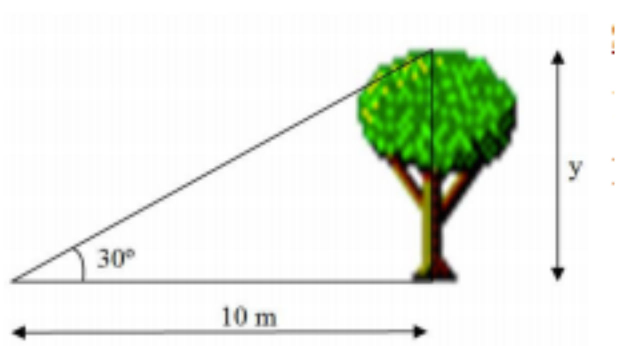
$\text{sen}\alpha/2 = \pm\sqrt{(1 - \cos\alpha)/2}$
$\cos\alpha/2 = \pm\sqrt{(1 + \cos\alpha)/2}$
$\text{tg}\alpha/2 = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)}$

Transformar sumas en productos

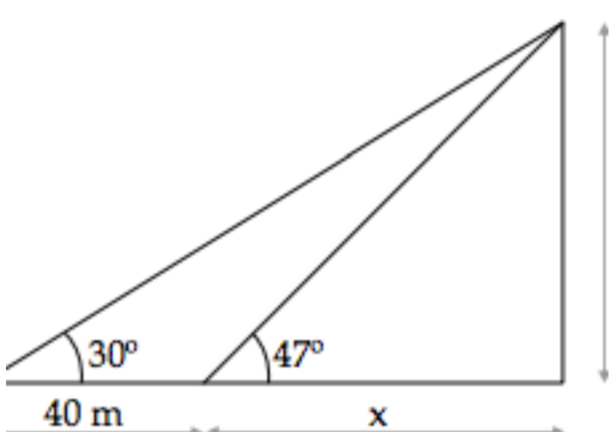
$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}((\alpha+\beta)/2)\cdot\cos((\alpha-\beta)/2)$
$\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cdot\text{sen}((\alpha-\beta)/2)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cdot\cos((\alpha-\beta)/2)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\text{sen}((\alpha+\beta)/2)\cdot\text{sen}((\alpha-\beta)/2)$

Practica lo aprendido en todas las unidades:

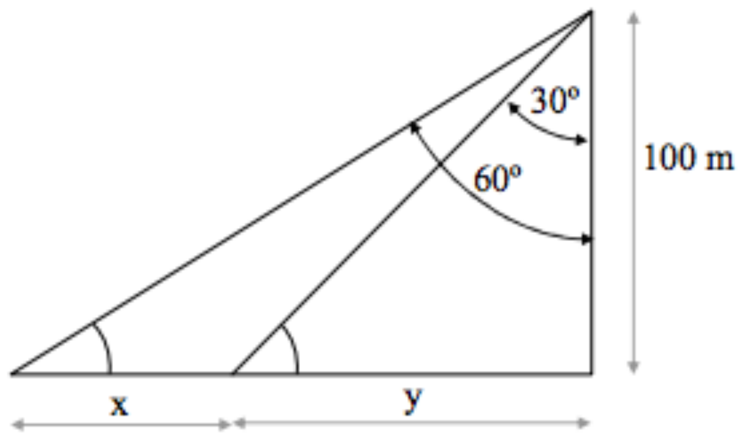
1. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30º.



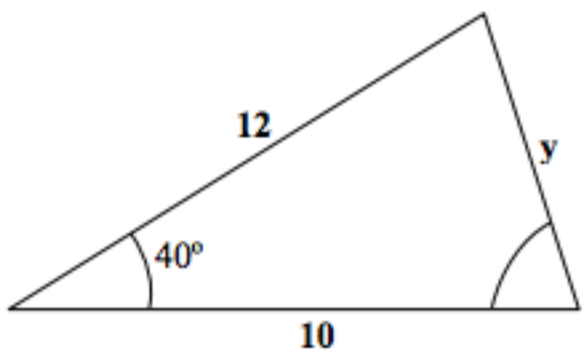
2. Calcula x e y:



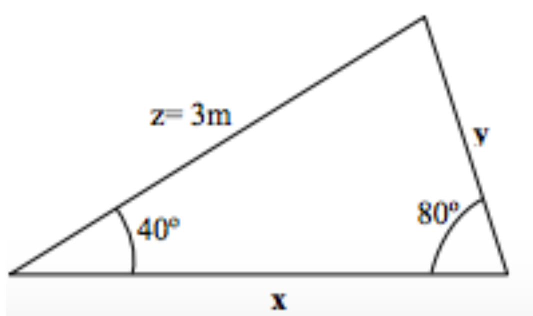
3. Calcula x



4. Calcula el valor de y (las longitudes están expresadas en m.



6. Calcula el valor de los lados x e y, aplicando el Teorema del seno: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$



6. GLOSARIO:

Adyacente: Esta próximo o unido a otra cosa.
Cateto: Lado que junto a otra forma un ángulo recto de un triángulo rectángulo.
Cateto: Lado que junto a otra forma un ángulo recto de un triángulo rectángulo.
Cosecante: Razón trigonométrica de un ángulo equivalente a la inversa del seno del mismo ángulo.
Coseno: Razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa en un triángulo rectángulo con un ángulo igual al dado.
Ecuación: igualdad entre dos expresiones que contiene una o más variables.
Hipotenusa: Lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.
Hipotenusa: Lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Radianes: Unidad de medida de ángulos del Sistema Internacional, de símbolo *rad*, que equivale a un ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de una circunferencia,
Radianes: Unidad de medida de ángulos del Sistema Internacional, de símbolo *rad*, que equivale a un ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de una circunferencia,
Sexagesimal: Con lo que se mide el tiempo y se hacen operaciones para medir grados ya sea por multiplicación, división, etc.
Sexagesimal: Con lo que se mide el tiempo y se hacen operaciones para medir grados ya sea por multiplicación, división, etc.

7. REFERENTES BIBLIOGRAFICOS:

URIBE CALAD, Julio Alberto. Matemáticas básicas y operativas. Medellín: Susaeta, 1996
MORENO GUTIERREZ, Vladimir, Matematicas serie ALFA, Norma 1999
SERRANO DE PLAZA,S Celly. Conexiones matemáticas. Norma, 2006

8. CONTROL DE DOCUMENTO:

Autor (es)	Nombre	Cargo	Dependencia	FECHA
	Ximena Del Pilar Alcázar Paternina	Docente	Área Matemáticas	Abril de 2020

9. CONTROL DE CAMBIOS: (diligenciar únicamente si realiza ajustes a la guía).

Autor (es)	Nombre	Cargo	Dependencia	Fecha	Razón del Cambio