Tabla de contenido

1. IDENTIFICACIÓN:

Área: Matemáticas (Geometría) **Grado:** Décimo **Tiempo:** 10 meses

Competencias
Comprendo el concepto del teorema de Pitágoras.
Calculo las diferentes longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
Reconozco el vector como una unidad de medida de magnitud vectorial.

Resultados de aprendizaje
Reconocimiento de las condiciones en las cuales se usa el teorema de Pitágoras
Construcción de diagramas y solución para problemas aplicados relacionados con el teorema de Pitágoras.
Interpretación física de la suma y resta de vectores.

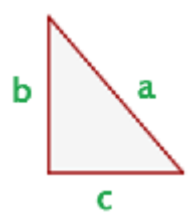
2. PRESENTACIÓN:

Esta guía está diseñada para el desarrollo de las habilidades enfocado al estudio del teorema de Pitágoras, y el concepto de volumen para los figuras mas representativas como lo son el cono, el cilindro y la esfera.
Además está enfocado en el estudio de los vectores, campo ampliamente usado en las corrientes de viento, campos eléctricos.

3. UNIDADES DE APRENDIZAJE:

UNIDAD 1: TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras establece que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

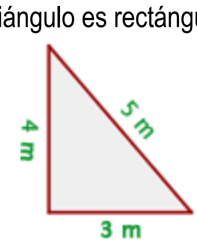


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Empleo del teorema de Pitágoras

Conociendo los lados de un triángulo, averiguar si es rectángulo.
Para que un triángulo sea rectángulo el cuadrado de lado mayor ha de ser igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.

1. Determinar si el triángulo es rectángulo.



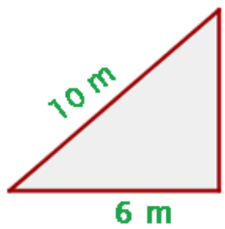
$$5^2 = 3^2 + 4^2 \qquad 25 = 25$$

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden en 3 m y 4 m respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \qquad a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

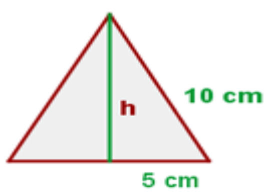
EJEMPLOS:

1. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?



$$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ m$$

2. Hallar el área de un triángulo equilátero

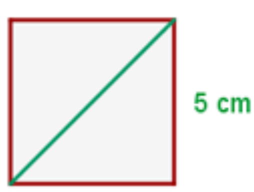


$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8.66\ \text{cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8.66}{2} = 43.30\ \text{cm}^2$$

3. Hallar la diagonal del cuadrado:

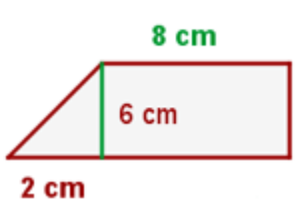


$$d^2 = 5^2 + 5^2 \quad d = \sqrt{50} = 7.07\ \text{cm}$$

4. Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:

$$l^2 = 6^2 + 2^2$$

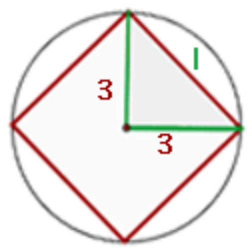
$$l = \sqrt{40} = 6.32\ \text{cm}$$



$$P = 8 + 6 + 12 + 6.32 = 32.32\ \text{cm}$$

$$A = \frac{(12 + 8) \cdot 6}{2} = 60\ \text{cm}^2$$

5. Calcular el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18.84 m.

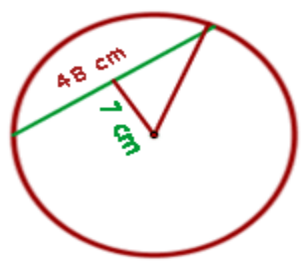


$$18.84 = 2 \cdot \pi \cdot r \quad r = \frac{18.84}{2 \cdot \pi} = 3\ cm$$

$$l = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$A = \left(\sqrt{18}\right)^2 = 18\ cm^2$$

6. En una circunferencia una cuerda de 48 cm y dista 7 cm del centro. Calcular el área del círculo.

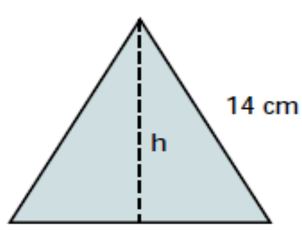


$$r = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

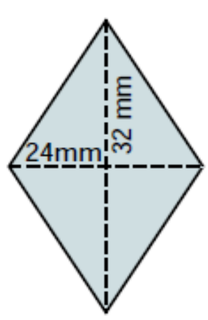
$$A = \pi \cdot 25^2 = 1963.50\ cm^2$$

ACTIVIDAD 1

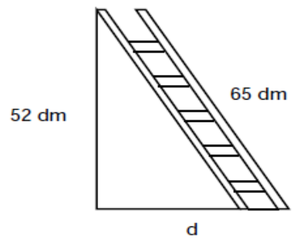
Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.



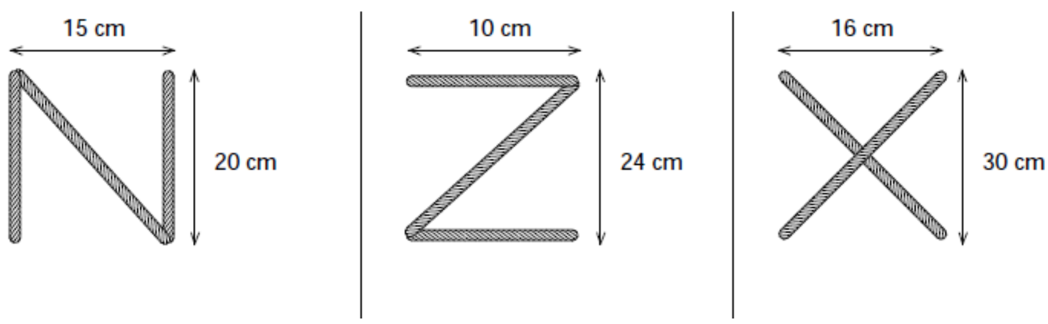
Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 mm y 24 mm.



¿A qué distancia de la pared habrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 52 dm?

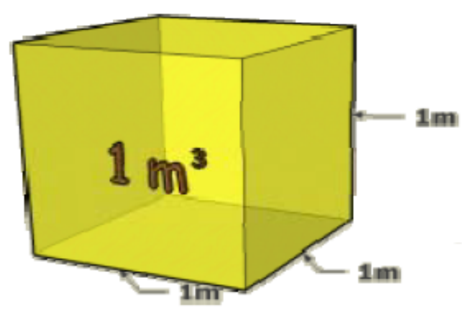


Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formar las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones.



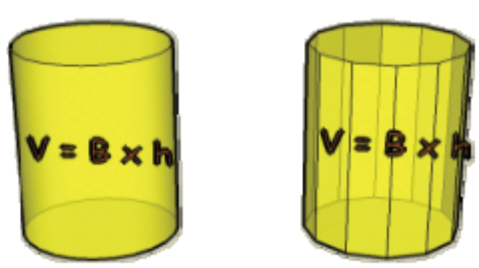
VOLUMEN

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. La unidad principal es el metro cúbico (m3).



Volumen de un cilindro

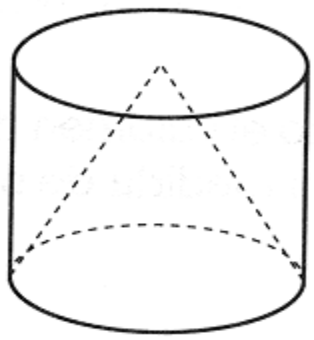
El volumen de un cilindro es el área de su base por su altura.



$$\textbf{Volumen (V)} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Volumen de un cono

Al inscribir un cono dentro de un cilindro de iguales bases y altura, el volumen del cono equivale a la tercera parte del volumen del cilindro.

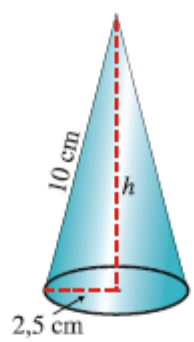


Por tanto:

Para obtener el volumen del cono se multiplica el área de la base por su altura y se divide entre tres, esto es: $V = \frac{Bh}{3}$ o $V = \frac{1}{3}Bh$

ACTIVIDAD 2

1. Halla el volumen de un cono cuya generatriz mide 10 cm y el radio de su base es de 2,5 cm.



2. Calcula el volumen de un depósito en forma de prisma pentagonal regular cuya altura mide 2’5 cm y el área de la base 80 cm2.

3. El volumen de un cubo mide 2197 cm3. Calcula el lado del cubo y la diagonal Principal.

4. Calcular el volumen de un cilindro de diámetro 10 cm y altura 12 cm.

5. Si pegamos los bordes menores de una hoja de papel (de 30 centímetros), se obtiene un cilindro ¿cuánto mide su radio?.

6. Calcula la altura, volumen y superficie de un cono de radio 3 m y generatriz 5 m.

7. Con una plancha rectangular de 6 cm por 8 cm se pueden construir dos cilindros según se unan los bordes mayores o menores. ¿Cuál tiene mayor área?.¿Y mayor volumen?.

8. ¿Cuántos litros de agua hay que sacar de un depósito cilíndrico de 8 m de altura y 3’5 de radio básico para que el nivel de agua descienda 3 m?

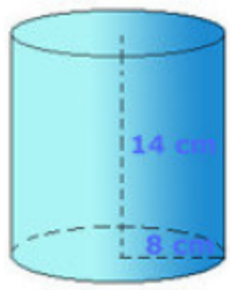
9. Halla el volumen de un cilindro de 11,12 cm de altura y 8,6 cm de diámetro.

10. Halla la capacidad, en litros, de un depósito cilíndrico cuya circunferencia de la base (longitud de la circunferencia) mide 21, 98 m y la altura 6,3 m.

11. Halla la altura de un cilindro cuyo volumen es 825,192 cm3 y el radio de la base 6 cm.

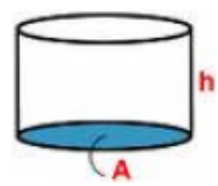
12. Averigua cual es el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro cuya área de la base mide 50,24 cm2 y la altura 8,5 cm.

13. ¿Cuántos litros de agua cabrán en un depósito igual que este cilindro?



14. Se agregan 7 centímetros de agua en un recipiente de 1,3 centímetros de radio. ¿qué altura alcanzara el agua?

15. ¿Cuántos litros de agua caben en el siguiente depósito de 2 cm de radio y 2,5 de altura?



16. Un laboratorio farmacéutico envasa el alcohol en frascos de forma cilíndrica, que miden 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. Calcula la capacidad en litros de cada frasco de alcohol.

17. ¿Qué altura deberá tener un deposito cilíndrico de 5 m de radio para que pueda contener 314.000 litros de agua.

18. ¿Cuántos litros caben en un bidón que tiene 40 cm de radio y 0,9 metros de altura?.

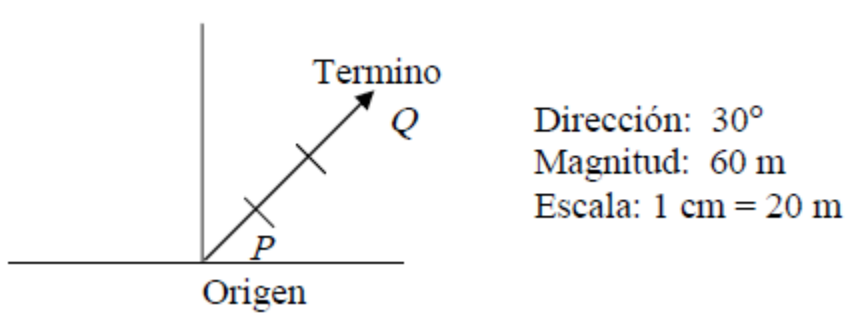
UNIDAD 2: VECTORES EN EL PLANO

CONCEPTOS CLAVES

Definición de vector: Cantidad física que tiene magnitud, dirección y sentido. Son ejemplos de vectores, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el peso.

REPRESENTACION GRAFICA DE VECTORES

Un vector se representa gráficamente, como un segmento dirigido de recta $\overrightarrow{PQ}$, de un punto P llamado punto inicial o origen a otro punto Q llamado punto terminal. Una punta de flecha en un extremo indica el sentido; la longitud del segmento, interpretada con una escala determina la magnitud. La dirección del vector se especifica al dar los ángulos que forma el segmento de recta con los ejes de coordenadas.

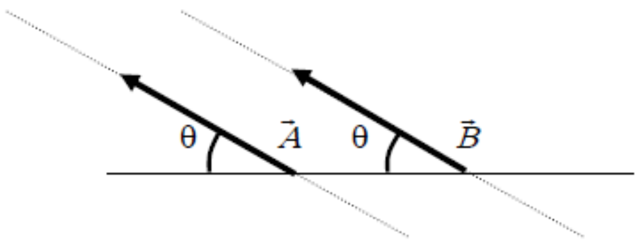


Elementos de un Vector

Los vectores tienen longitud (medida del segmento PQ), dirección (la misma que tiene la recta que los contiene) y sentido (según lo indica la flecha).

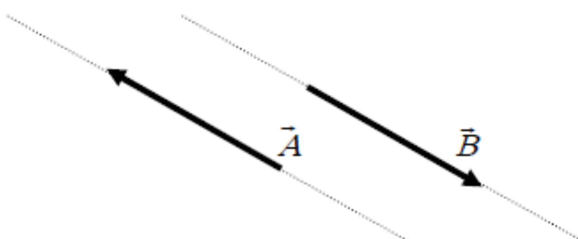
CLASIFICACION DE VECTORES

Vectores Iguales: Son aquellos, que tienen la misma dirección, sentido y magnitud, aunque no tengan el mismo punto de aplicación.



$\vec{A} = \vec{B}$

Vectores Paralelos: Son aquellos que tienen su línea de acción paralelas.



$\vec{A} \parallel \vec{B}$

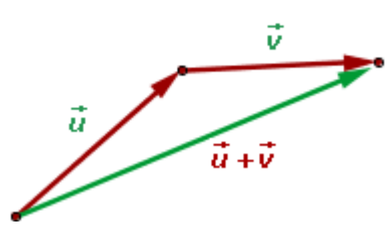
Vectores Nulos: Su símbolo es $\vec{o}$. Es el vector cuyo modulo es cero, es decir que su origen coincide con el extremo, y se representa como un punto.

Vector Opuesto: Es el vector $\overrightarrow{-v}$ es opuesto a $\vec{v}$ si tiene igual dirección y modulo, pero sentido contrario.

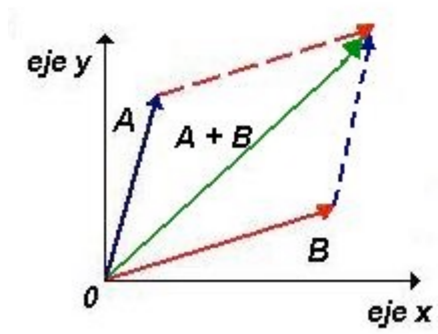
SUMA DE VECTORES

Suma de vectores geométricamente

Regla del triángulo: Para sumar dos vectores libres y se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo de uno coincida con el origen del otro vector.



Regla del Paralelogramo: Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.



Suma de vectores Analíticamente:
La suma de dos vectores A =(a1 , a2) y B =(b1 , b2) es el Vector A+B=(a1+b1 , a2+b2)
Como has podido observar, hemos sumado las correspondientes componentes de los vectores A y B.

ACTIVIDAD 3

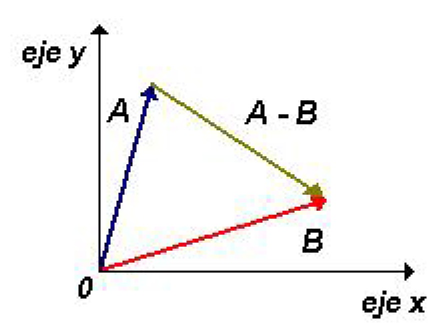
1. Represente los siguientes vectores y calcule su suma gráficamente
   A (2,5) B (3,2)
   C (7,2) D (2,3)
   E (4,8) F (5,-3)
   G (3,6) H (7,2)
2. Halle el vector de posición correspondiente

a. P (1,4), Q (5,3) b. P (7,-3), Q(-2,4)

3. Dado el vector AB (2, -1) y el punto B (3,1), halla las coordenadas del punto A.
4. Dados los puntos A (1,0) y B (3,2) hallar las coordenadas del vector AB y su módulo.
5. Dado el vector A (9,3), calcular el vector B que cumple A+B (4,9).
6. Dado el vector A (2,-5), calcular su módulo y decir si tiene la misma dirección y sentido del vector B (-5,2)

UNIDAD 3: RESTA DE VECTORES

Resta de vectores Geométricamente
Para obtener A-B en forma geométrica, basta con unir el extremo de A con el extremo de B (ver la figura).



Resta de vectores analíticamente

La diferencia o resta de dos vectores A y B se denota por A – B y se define por el vector que se obtiene al sumar a A y el negativo de B, esto es, A – B = A + (-B)
Si A = (a1 , a2) y B = (b1 , b2) entonces
A – B = (a1 – b1 , a2 – b2)

ACTIVIDAD 4

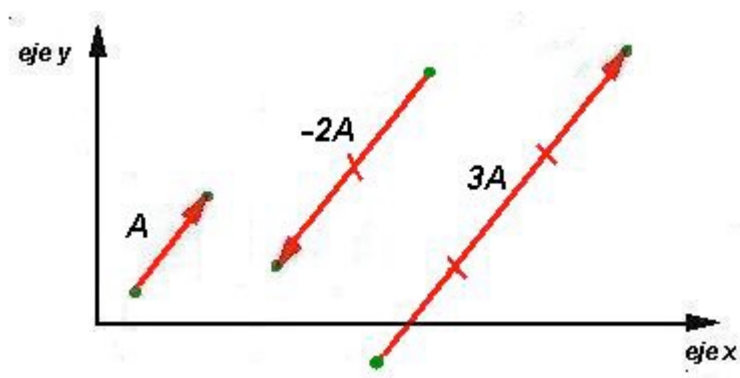
1. A (2,-1) B(1,0) C (4,6)

Realizar las siguientes operaciones

A-B
A-C
B-A

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si α es un escalar y A = (a1, a2) es un vector entonces el producto de α por A es el vector αA = α (a1, a2) = (αa1, αa2).



2. Para los vectores A = (3 , 7), B = (-2 , -1) y C = (-4 , 2); calcule las expresiones vectoriales siguientes:

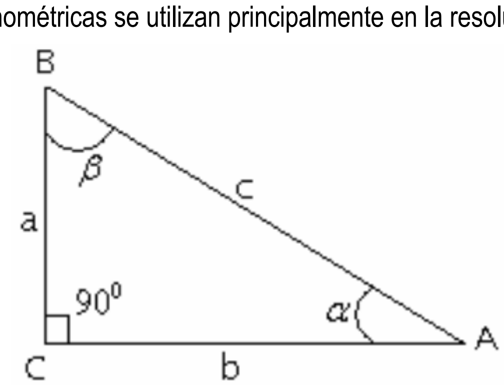
a. A + B
b. 2A–B
c. 5A–2B+6C
d. A– [(B–A)+C]

Con los vectores anteriores, halle escalares α y β de modo que se satisfaga:

a. αB – βA = C
b. α(A–B) = 3βC

UNIDAD 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas se utilizan principalmente en la resolución de triángulos rectángulos.



$$\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$$

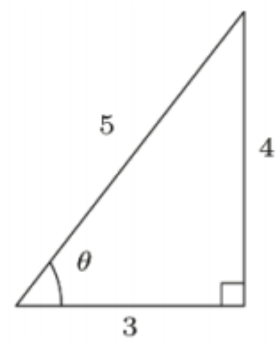
Tomando el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera.

$$sen\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto \;\; opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \;\; adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto \;\; adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{cateto \;\; adyacente}{cateto \;\; opuesto} = \frac{b}{a}$$

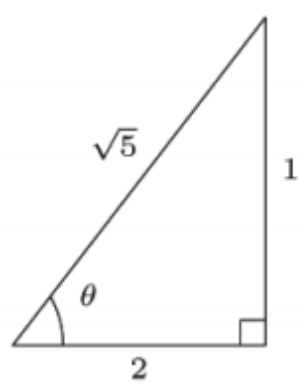
Ejemplo:
Para los siguientes triángulos rectángulos calcule las 6 razones trigonométricas de θ :



$$sen\theta = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

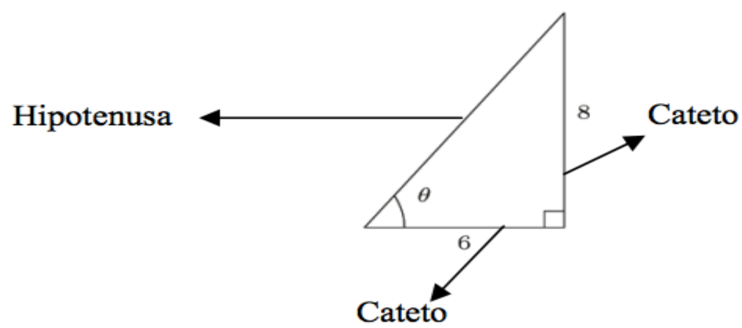
$$\tan\theta = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$



$$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \qquad \cot\theta = 2$$



Como este es un triángulo rectángulo, podemos usar el Teorema de Pitágoras para calcular el lado que nos falta. El Teorema de Pitágoras nos dice que en un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En este caso tenemos c=10. Usamos esto para calcular las razones trigonométricas.

$$sen\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{8}{6} = \frac{3}{4}$$

ÁNGULOS NOTABLES

En general, es difícil saber el valor de las razones trigonométricas para un ángulo. Pero para ciertos ángulos, llamados ángulos especiales, podemos saber el valor exacto. 1. 45° 14 Si θ = 45° entonces β = 45°. Esto nos dice que a = b.

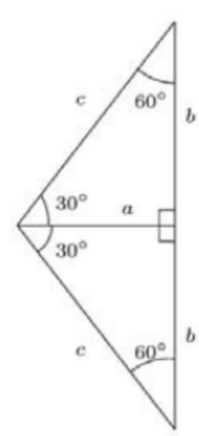
Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$. Entonces tenemos:

$$sen45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Si θ = 30° entonces adjuntamos otro triángulo igual y obtenemos un triángulo equilátero donde cada ángulo mide 60°. Tenemos entonces que c = 2b. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos:



$$(2b)^2 = a^2 + b^2$$
$$4b^2 = a^2 + b^2$$
$$3b^2 = a^2$$
$$b\sqrt{3} = a$$

Entonces tenemos:

$$sen\,30^\circ = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30^\circ = \frac{2b}{b} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{2b}{b\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{b}{b\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^\circ = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3}$$

Si θ = 60°, por el mismo procedimiento del caso anterior, tenemos

$$sen\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = 2$$

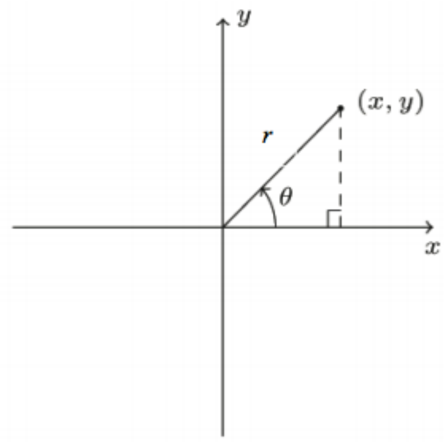
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Los resultados se resumen en la siguiente tabla:
Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

grados	30°	45°	60°
radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS APLICADO AL PLANO CARTESIANO

Volviendo al plano cartesiano, sea (x, y) un punto en el primer cuadrante. Observe que este punto determina el lado terminal de un ángulo y con esto podemos formar un triángulo rectángulo en el plano.



Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ las razones trigonométricas se convierten en:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Ejemplo:

Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto (1, 2). Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Con esto podemos calcular las razones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = 3 \qquad \cot\theta = \frac{1}{3}$$

Ejemplo:

Si x = 4, r = 5, halla las 6 razones trigonométricas Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$5^2 = 4^2 + y^2$$
$$25 = 16 + y^2$$
$$25 - 16 = y^2$$
$$9 = y^2$$
$$3 = y$$

Con esto podemos calcular las funciones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{3}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

A continuación presentamos una tabla mas completa

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.
$\csc\theta$	n.d.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	n.d.	-1
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	n.d.	-1	n.d.
$\cot\theta$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.d.	0

Si sabemos el cuadrante en el que ángulo está, podemos deducir el signo de la función trigonométrica.
Ejemplo:

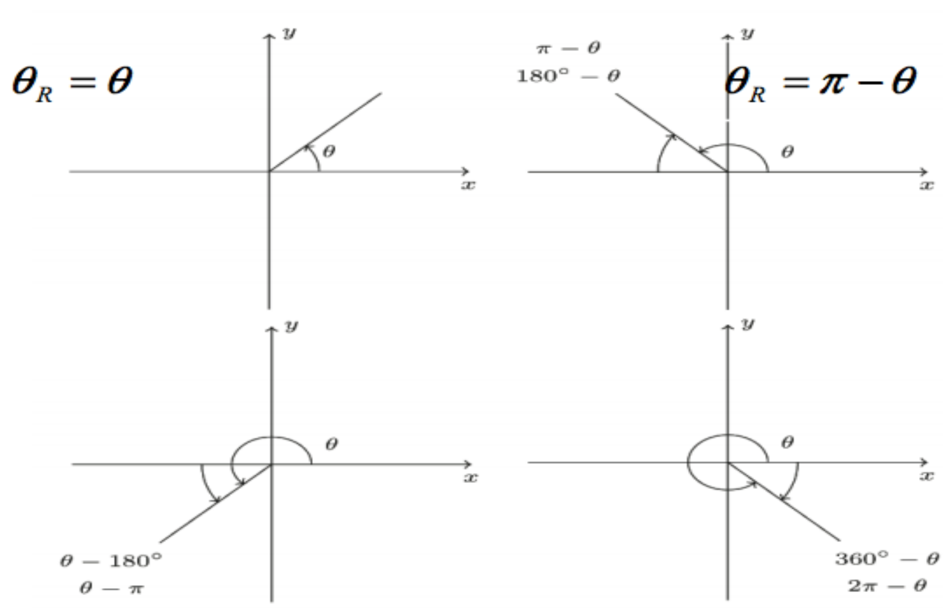
a) sen θ

Debido a que sen(θ) = y /r y que r siempre es positivo, es suficiente saber el signo de y en cada cuadrante. En el primer y segundo cuadrante y > 0, en el tercero y el cuarto y < 0. Por lo tanto, sn 0 e θ > en el primer y segundo cuadrante y senθ < 0 en el tercer y cuarto cuadrante.

b) tanθ

Debido a que tanθ = y/x , tanθ es positivo si x > 0 y y > 0 ó x < 0 y y < 0. Esto ocurre en el primer y el tercer cuadrante. Por lo tanto tanθ > 0 en el primer y el cuarto cuadrante y tanθ < 0 en el segundo y el cuarto cuadrante.

Definición
El ángulo de referencia de θ es el ángulo positivo agudo formado por el eje de x y el lado terminal de θ. Los siguientes diagramas nos muestran cómo calcular el ángulo de referencia.



ACTIVIDAD 5

1) Para los siguentes triángulos rectángulos, en donde los catetos se denotan por a y b y la hipotenusa por c, calcule las 6 razones trigonométricas:

   a) $a = 3, b = 5$

   b) $a = 1, c = 4$

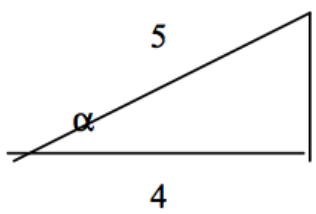
   c) $a = 2, b = 7$

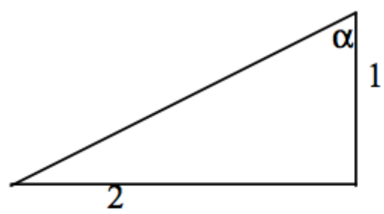
2) Determine las seis razones trigonométricas del ángulo con la información dada:

   a) el lado terminal del ángulo pasa por el punto (4, 6).

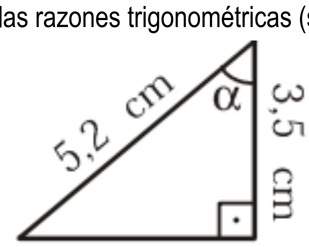
   b) $y = 2, r = 6$

3) Determine las seis razones trigonométricas del ángulo θ dada la siguiente información:
   a. el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el segundo cuadrante, y = 2, r = 5
   b. el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (1, 0)
   c. el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (0, 1)
   d. el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (-1, 0)
   e. el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (0, -1)
4) Dados los siguientes triángulos, hallar las razones trigonométricas del ángulo α





5) Halla las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) del ángulo α:



6) Halla, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

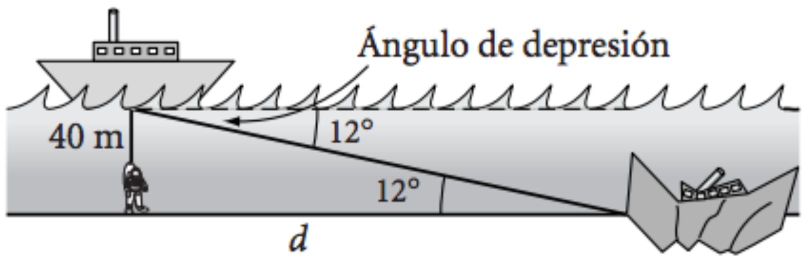
   a) 135º b) 450º c) 210º d) –60º

7) Sabiendo que sen 25° = 0,42, cos 25° = 0,91 y tag 25° = 0,47, halla (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora) las razones trigonométricas de 155° y de 205°
8) Si el sen α = -2/3 y α es un ángulo del tercer cuadrante hallar el resto de razones trigonométricas.
9) Calcular sen α, sabiendo que tag α = 3/2 y que α es un ángulo del tercer cuadrante
10) Sabiendo que cosec α = -5 y que π < α < 3π/2, calcular las razones trigonométricas de α.

UNIDAD 6: APLICACIONES RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

La trigonometría de los triángulos rectangulos se utiliza frecuentamente para encontrar la altura de un objeto alto de manera indirecta. Para resolver un problema de este tipo, mide el ángulo desde la horizontal hasta tu recta de visión, cuando veas la parte superior o inferior del objeto. Si miras hacia arriba, medirás el ángulo de elevación. Si miras hacia abajo, medirás el ángulo de depresión. En el ejemplo de tu libro se usa el ángulo de elevación para encontrar una distancia de manera indirecta. Lee el ejemplo atentamente. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución. Después trata de resolver los problemas de los ejemplos siguientes.

Ejemplo:
El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?
Solución:
Haz un dibujo para ilustrar la situación. Observa que, como el fondo del mar es paralelo a la superficie del agua, el ángulo de elevación desde los restos del naufragio hasta el barco es igual al ángulo de depresión desde el barco hasta los restos del naufragio.

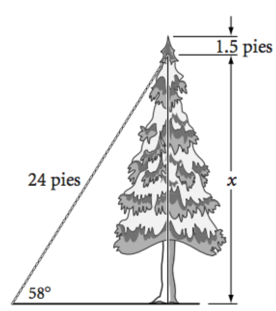


La distancia que el buzo es bajado (40 m) es la longitud del lado opuesto al ángulo de 12°. La distancia que el buzo necesita avanzar es la longitud del lado adyacente al ángulo de 12°. Establece la razón tangente.

$$\tan 12° = \frac{40}{d}$$
$$d(\tan 12°) = 40$$
$$d = \frac{40}{\tan 12°}$$
$$d \approx 188.19$$

El buzo necesita avanzar aproximadamente 188 metros para llegar a los restos del naufragio.

Ejemplo:
Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de 58° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?
Solución
Haz un dibujo para ilustrar la situación.



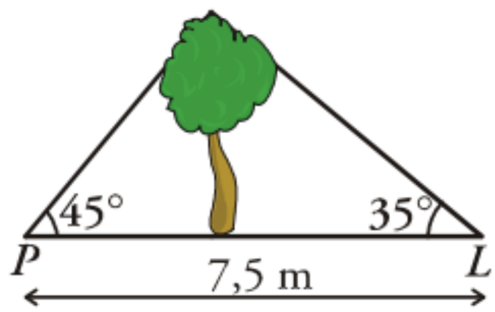
La longitud de la hipotenusa está dada, y la distancia desconocida es la longitud del lado opuesto al ángulo de 58°. Establece la razón seno.

$$\sin 58° = \frac{x}{24}$$
$$24(\sin 58°) = x$$
$$20.4 \approx x$$

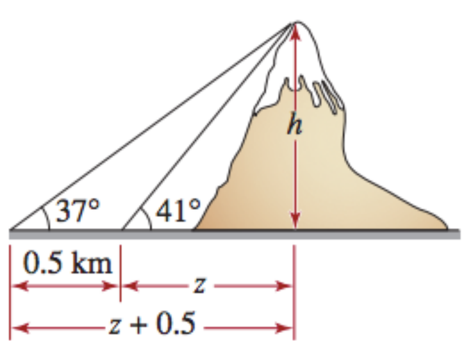
La distancia desde el suelo hasta el punto donde el alambre se sujeta al árbol es aproximadamente 20.4 pies. Como el alambre se sujeta a 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol, la altura es aproximadamente 20.4 + 1.5, ó 21.9 pies.

ACTIVIDAD 6

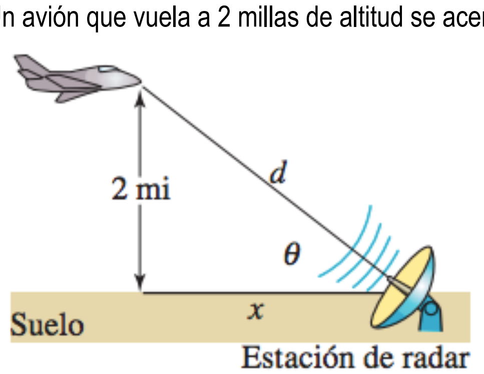
1) El ángulo de elevación de una cometa sujeta con una cuerda de longitud L1 = 80 m es α = 30º. El viento tensa la cuerda y la hace chocar con otra cometa cuyo ángulo de elevación es B = 60º. ¿Cuál es la altura de las cometas en ese instante? ¿Y la longitud L2 de la cuerda que sujeta la segunda cometa?
2) Desde el lugar donde me encuentro, la visual a la torre de una Iglesia forma un ángulo de 52º con la horizontal. Si me alejo 25 m más de la torre, el ángulo es de 34º. ¿ Cuál es la altura de la torre?
3) Desde el lugar donde me encuentro la visual de una torre forma un ángulo de 32º con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50º. ¿Cuál es la altura de la torre?
4) Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?
5) Queremos fijar un poste de 3,5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40°. ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?
6) Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



7) Dado un trapecio isósceles de base mayor 27 cm, base menor 18 cm y altura 18 cm. Calcular el ángulo que forma el lado oblicuo con la base mayor.
8) Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña?

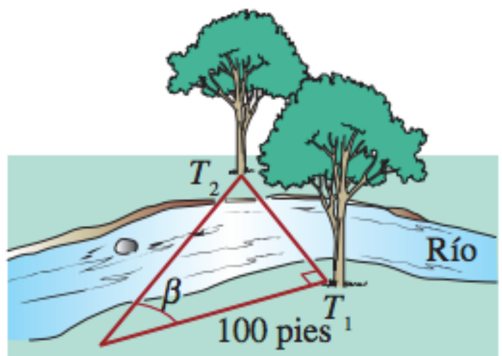


9) Un avión que vuela a 2 millas de altitud se acerca a una estación de radar, como muestra la figura



a. Expresar la distancia d entre el avión y la estación de radar en función del ángulo de elevación u.
b. Expresar el ángulo de elevación u del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

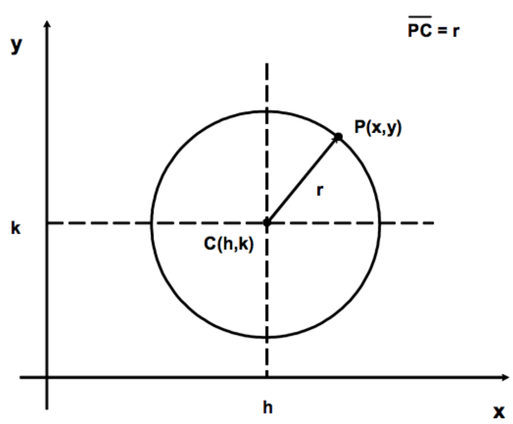
10) Un edificio proyecta una sombra de 20 m de longitud. Si el ángulo de la punta de la sombra a un punto en la parte alta del edificio es de 69° ¿qué altura tiene el edificio?
11) Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como se ve en la FIGURA 10.2.7. Se mide una línea de referencia de 100 pies del árbol T1 y de esa posición se mide un ángulo b a T2, que resulta de 29.7°. Si la línea de referencia es perpendicular al segmento de recta entre T1 y T2, calcule la distancia entre los dos árboles.



12) Una torre de 50 pies está a la orilla de un río. El ángulo de elevación entre la orilla opuesta y la punta de la torre es de 37°. ¿Qué anchura tiene el río?
13) Un observador en la azotea del edificio A mide un ángulo de depresión de 27° entre la horizontal y la base del edificio B. El ángulo de elevación del mismo punto en la azotea a la azotea del segundo edificio es de 41.42°. ¿Cuál es la altura del edificio B, si la altura del edificio A es de 150 pies? Suponga que los edificios A y B están sobre el mismo plano horizontal.

UNIDAD 7: LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado centro. La distancia que existe de cualquiera de sus puntos al centro recibe el nombre de radio. Cabe señalar que una circunferencia y un círculo no son sinónimos, ya que un círculo es la porción del plano comprendida y limitada por una circunferencia, es decir, toda su región interior. Si el centro de la circunferencia se ubica en el punto de coordenadas (k,h), su gráfica tendrá una forma como la siguiente:



Para obtener la ecuación que describe a este lugar geométrico, se aplica la fórmula de distancia entre los puntos P(y,x) y C (k,h):

$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Pero por definición, esta distancia es igual al radio r , por lo tanto:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Elevando al cuadrado:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Que es la ecuación ordinaria o canónica de la circunferencia con centro en (k,h) y radio r .

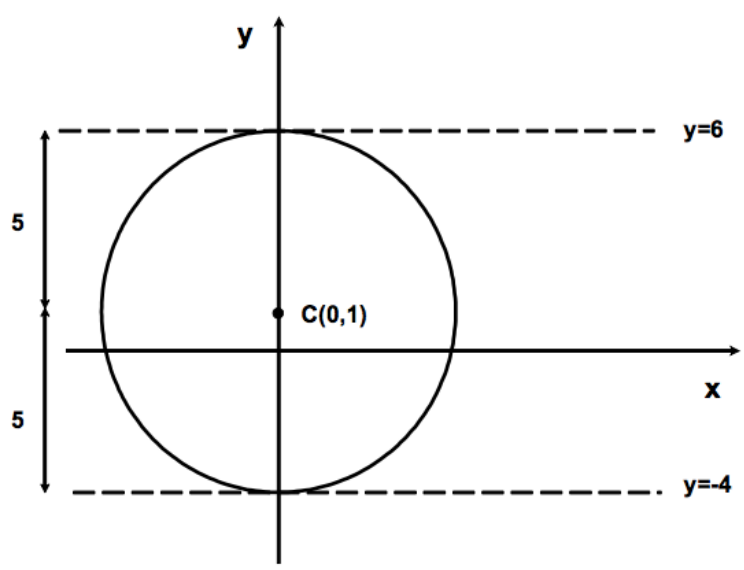
Para el caso especial en que el centro se localiza en el origen, esta ecuación toma la forma:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplo:
Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en C (3,−7) y que tenga radio seis.
Solución
h = 3, k = −7, r = 6 , aplicando la fórmula:

$$(x-3)^2+(y-(-7))^2=6^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y+7)^2=36 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2+14y+49=36$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-6x+14y+22=0$$

Ejemplo:
Hallar la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas y = 6, y = −4 y que esté sobre el eje y .
Solución
Graficando tenemos que



Note que el radio r=5. Aplicando la fórmula

$$(x-0)^2+(y-1)^2=5^2 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-2y+1=25$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2y-24=0$$

ACTIVIDAD 7

1) Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen
   a. . Si el radio es igual a 5
   b. . Si el radio es igual a √ 2

c. Si el radio es igual 4
d. Diámetro igual a 12

2) Hallar las graficas de la circunterencia con radio en (2,2) y
a. . Si el radio es igual a 5
b. . Si el radio es igual a $\sqrt{2}$
c. Si el radio es igual 4
d. Diámetro igual a 12

4. GLOSARIO:

Triángulo rectángulo: triángulo con uno de sus ángulos igual a 90 grados
Pitágoras: Filósofo y matemático griego.
Volumen: espacio que encierra un cuerpo.
Vector: Segmento de recta con magnitud y dirección.

5. BIBLIOGRAFÍA:

[1] Baldor, J. A. (1967). *Geometría plana y del espacio...* Cultural Centroamericana, SA.
[2] Apuntes de matemáticas. Lugar de publicación:
https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/1ccnnvectorestema4.pdf

6. CONTROL DE DOCUMENTOS:

Autor (es)	Nombre	Cargo	Dependencia	Fecha
	John Edisson Tunubalá Morales	Docente	Matemáticas	3 de abril del 2020

7. CONTROL DE CAMBIOS: (diligenciar únicamente si realiza ajustes a la guía)

Autor (es)	Nombre	Cargo	Dependencia	Fecha	Razón del cambio